

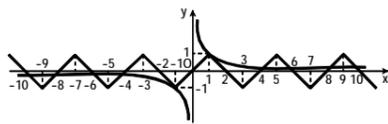
第4期

第2-3版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1.D 2.D 3.A 4.B 5.A 6.A 7.C
8.A 9.A 10.D 11.B
12.C

提示:在同一坐标系中画出函数 $y=f(x)$ 和函数 $y=\frac{1}{x}+a$ 的图象如下图所示:



(第12题图)

$y=\frac{1}{x}+a$ 的图象是由 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上下平移得到的,由图得,向上平移时保证图象第三象限的部分在 x 轴的下方,则第一象限部分有 4 个交点,第三象限部分有 6 个交点;同时向下平移时保证图象第一象限的部分在 x 轴的上方,则第一象限的部分有 6 个交点,第三象限部分有 4 个交点,即 $-\frac{1}{10}+a \leq 0$, $\frac{1}{10}+a \geq 0$, 解得 $-\frac{1}{10} \leq a \leq \frac{1}{10}$. 故选 C.

二、填空题

- 13.(0,1]
14.-1
15. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

16. $[1-\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$

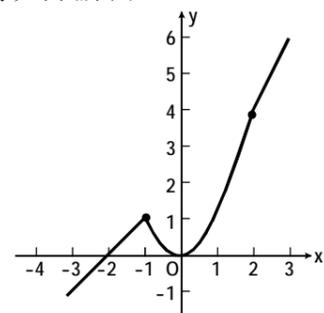
提示:因为 $f(x)$ 为“局部奇函数”,所以存在实数 x 满足 $f(-x)=-f(x)$,即 $4^x-2m2^x+m^2-3=-4^x+2m2^x-m^2+3$ 有解.

令 $t=2^x(t>0)$, 则 $\frac{1}{t^2}+t^2-2m(\frac{1}{t}+t)+2m^2-6=0$, $(\frac{1}{t}+t)^2-2m(\frac{1}{t}+t)+2m^2-8=0$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上有解.再令 $h=\frac{1}{t}+t(h \geq 2)$, 则 $g(h)=h^2-2mh+2m^2-8=0$ 在 $h \in [2, +\infty)$ 上有解.函数 $g(h)$ 的对称轴为 $h=m$, ①当 $m \geq 2$ 时, $g(h) \geq g(m)$, 所以 $g(m)=m^2-2m^2+2m^2-8 \leq 0$, 解得 $2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$; ②当 $m < 2$ 时, 则 $g(h) \geq g(2)$, 所以 $g(2)=4-4m+2m^2-8 \leq 0$, 即 $m^2-2m-2 \leq 0$, 解得 $1-\sqrt{3} \leq m < 2$.

综合①②, 可知 m 的取值范围是 $[1-\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$.

三、解答题

17.解:(1)函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$ 的图象如下图所示:



(第17题图)

(2)当 $a \leq -1$ 时, $f(a)=a+2=\frac{1}{2}$,

可得 $a=-\frac{3}{2}$;

当 $-1 < a < 2$ 时, $f(a)=a^2=\frac{1}{2}$,

可得 $a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$;

当 $a \geq 2$ 时, $f(a)=2a=\frac{1}{2}$,

可得 $a=\frac{1}{4}$ (舍去).

综上所述, 实数 a 的取值集合为

$$\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

18.解:(1)设 $x \in [0, 1]$, 则 $-x \in [-1, 0]$,

所以 $f(-x)=\frac{1}{4^{-x}}-\frac{1}{2^{-x}}=4^x-2^x$.

又因为 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $-f(x)=4^x-2^x$, 所以 $f(x)=2^x-4^x$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的解析式为 $f(x)=2^x-4^x$.

(2)当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)=2^x-4^x=2^x-(2^x)^2$, 所以设 $t=2^x(t>0)$, 则 $f(t)=t-t^2$.

因为 $x \in [0, 1]$, 所以 $t \in [1, 2]$.

此时 $f(t)$ 为减函数, 所以当 $t=1$ 时, 取最大值, 最大值为 $f(1)=1-1=0$; 当 $t=2$ 时, 取最小值, 最小值为 $f(2)=-2$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值分别为 0, -2.

19.解:(1)设点 (x, y) 是 $y=g(x)$ 上的任意一点, 则 $(-x, -y)$ 在 $y=f(x)$ 上,

则 $-y=(-x)^2-x=x^2-x$, 即 $y=g(x)=-x^2+x$.

(2) $h(x)=-x^2+x-mx^2-mx+3=(-1-m)x^2+(1-m)x+3$,

当 $-1-m>0$, 即 $m < -1$ 时, 对称轴 $x=\frac{1-m}{2(m+1)} \leq -1$, 所以 $-3 \leq m < -1$;

当 $-1-m=0$, 即 $m=-1$ 时, $h(x)=2x+3$, 符合题意, 所以 $m=-1$;

当 $-1-m < 0$, 即 $m > -1$ 时, 对称轴 $x=\frac{1-m}{2(m+1)} \geq 1$, 所以 $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $[-3, -\frac{1}{3}]$.

20.解:(1)由题意, 可知 $\begin{cases} -2 < x-1 < 2, \\ -2 < 3-2x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}, \end{cases}$

解得 $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$,

所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

(2)由 $g(x) \leq 0$, 得 $f(x-1)+f(3-2x) \leq 0$, 所以 $f(x-1) \leq -f(3-2x)$.

又因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x-1) \leq f(2x-3)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减, 所以 $\begin{cases} -2 < x-1 < 2, \\ -2 < 2x-3 < 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 2, \\ x-1 \geq 2x-3 \end{cases}$

所以 $g(x) \leq 0$ 的解集为 $(\frac{1}{2}, 2]$.

21.解:(1)因为函数 $y=h(x)=(2x-3) \cdot$

$f(x)$ 的图象与 x 轴恰有两个不同的交点, 所以若 $f(x)=0$ 恰有一解, 且解不为 $\frac{3}{2}$, 即 $a^2-4=0$, 解得 $a=\pm 2$;

若 $f(x)=0$ 有两个不同的解, 且其中一个解为 $\frac{3}{2}$, 代入得 $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+1=0$, 解得 $a=-\frac{13}{6}$, 检验满足 $\Delta > 0$.

综上所述, a 的取值集合为 $\{-\frac{13}{6}, -2, 2\}$.

(2)①当 $-\frac{a}{2} \leq 0$, 即 $a \geq 0$ 时, 函数 $y=|f(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 故 $y_{\min}=f(1)=2+a$;

②当 $0 < -\frac{a}{2} < 1$, 即 $-2 < a < 0$ 时, $\Delta=a^2-4 < 0$, $f(x)$ 的图象的对称轴在 $(0, 1)$ 上, 且开口向上, 故 $y_{\min}=\max\{f(0), f(1)\}=\max\{1, a+2\}$;

③当 $1 < -\frac{a}{2}$, 即 $a < -2$ 时, $\Delta=a^2-4 > 0$, $f(x)$ 的图象的对称轴在 $(0, 1)$ 上, 且开口向上, 故 $y_{\min}=\min\{f(0), f(1)\}=\min\{1, a+2\}$;

综上所述, $y_{\min}=\begin{cases} a+2, & a \geq -1, \\ 1, & -2 < a < -1, \\ 1-a, & a < -2. \end{cases}$

22.解:(1) $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$ 是 Ω 函数, $g(x)=\sin \pi x$ 不是 Ω 函数.

(2)因为 $f(x)$ 是以 T 为最小正周期的周期函数, 所以 $f(T)=f(0)$.

假设 $T < 1$, 则 $[T] = 0$, 所以 $f([T])=f(0)$, 矛盾.

所以必有 $T \geq 1$, 而函数 $g(x)=x-[x]$ 的周期为 1, 且显然不是 Ω 函数, 综上所述, T 的最小值为 1.

(3)当函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 是 Ω 函数时, 若 $a=0$, 则 $f(x)=x$ 显然不是 Ω 函数, 矛盾.

若 $a < 0$, 则 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递增, 此时不存在 $m \in (-\infty, 0), m \notin \mathbb{Z}$, 使得 $f(m)=f([m])$,

同理不存在 $m \in (0, +\infty), m \notin \mathbb{Z}$, 使得 $f(m)=f([m])$, 又注意到 $m[m] \geq 0$, 即不会出现 $[m] < 0 < m$ 的情形, 所以此时 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 不是 Ω 函数.

当 $a > 0$ 时, 设 $f(m)=f([m])$, 所以 $m+\frac{a}{m}=[m]+\frac{a}{[m]}$,

所以有 $a=m[m]$, 其中 $[m] \neq 0$, 当 $m > 0$ 时, 因为 $[m] < m < [m]+1$, 所以 $[m]^2 < m[m] < ([m]+1)[m]$, 所以 $[m]^2 < a < ([m]+1)[m]$.

当 $m < 0$ 时, $[m] < 0$, 因为 $[m] < m < [m]+1$, 所以 $[m]^2 > m[m] > ([m]+1)[m]$, 所以 $[m]^2 > a > ([m]+1)[m]$.

记 $k=[m]$, 综上所述, 我们可以得到 a 的取值范围为 $\{a | a > 0 \text{ 且 } \forall k \in \mathbb{N}_+, a \neq k^2 \text{ 且 } a \neq k(k+1)\}$.

第1期

第2-3版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1-6.CDDCBA 7-12.DBDDBA

二、填空题

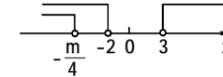
- 13.1
14.假
15. $\{a | a \leq -2, \text{ 或 } a=1\}$

16. $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 4\right]$

提示: 集合 $A = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{4}{5}\}$ 表示以点 $(3, 4)$ 为圆心, 半径为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 的圆, 集合 $B = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{16}{5}\}$ 表示以点 $(3, 4)$ 为圆心, 半径为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 的圆. 集合 $C = \{(x, y) | 2|x-3| + |y-4| = \lambda\}$, 由题意知 $\lambda > 0$, 所以集合 C 表示以点 $(3, 4)$ 为中心, 四条边的斜率为 ± 2 的菱形, 如图所示. 若 $(A \cup B) \cap C \neq \emptyset$, 则菱形与 A 或 B 表示的圆有交点. 当 $\lambda < \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 菱形在小圆的内部, 与两圆均无交点, 不满足题意; 当菱形与大圆相切时, 圆心 $(3, 4)$ 到菱形 $2|x-3| + |y-4| = \lambda$ 任一边的距离 d 等于大圆半径 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 当 $x > 3$ 且 $y > 4$ 时, 菱形一边的方程可化为 $2x+y-(10+\lambda)=0$, 由 $d = \frac{|10-(10+\lambda)|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 得 $\lambda=4$, 故 $\lambda > 4$ 时, 两圆均在菱形内部, 与菱形无交点, 不满足题意.

综上所述, 实数 λ 的取值范围是 $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 4\right]$.

由 $B \subseteq A$, 画出数轴如图.



(第17题图)

结合数轴, 得 $-\frac{m}{4} \leq -2$, 解得 $m \geq 8$.

故实数 m 的取值范围是 $\{m | m \geq 8\}$.

18.解: 命题 p 等价于: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+mx+1 \geq 0$. 若命题 p 为真, 则 $\Delta=m^2-4 \leq 0$, 解得 $-2 \leq m \leq 2$;

若命题 q 为真, 则方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 所以 $0 < m < 2$.

因为“ $p \wedge q$ ”是假命题, “ $p \vee q$ ”是真命题, 所以 p, q 一真一假.

当 p 真 q 假时, $\begin{cases} m \leq 0 \text{ 或 } m \geq 2, \\ -2 \leq m \leq 2, \end{cases}$ 所以 $-2 \leq m \leq 0$, 或 $m=2$.

当 p 假 q 真时, $\begin{cases} m < -2 \text{ 或 } m > 2, \\ 0 < m < 2, \end{cases}$ 无解.

综上所述, m 的取值范围是 $[-2, 0] \cup \{2\}$.

19.解:(1)对任意的实数 b 都有 $A \subseteq B$, 则 $1 \in A, 2 \in A, b \notin A$.

因为集合 $A = \{a-4, a+4\}$, 所以 $\begin{cases} a-4=1, \text{ 或 } \\ a+4=2, \text{ 或 } \end{cases} \begin{cases} a-4=2, \\ a+4=1, \end{cases}$

两方程组均无解, 所以满足题意的实数 a 不存在.

(2)由(1)易知, 欲 $A \subseteq B$, 当且仅当 $\begin{cases} a-4=1, \text{ 或 } \\ a+4=2, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-4=2, \\ a+4=1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=5, \text{ 或 } \\ b=9, \text{ 或 } \end{cases} \begin{cases} a=6, \\ b=10, \end{cases}$

或 $\begin{cases} a=-3, \text{ 或 } \\ b=-7, \end{cases} \begin{cases} a=-2, \\ b=-6. \end{cases}$

所以满足题意的实数对 (a, b) 为 $(5, 9), (6, 10), (-3, -7), (-2, -6)$.

20.解:(1)由 $(x+3)(6-x) \leq 0$, 得 $x \geq 6$ 或 $x \leq -3$, 所以 $A = (-\infty, -3] \cup [6, +\infty)$.

由 $\log_2(x+2) < 4 - \log_2 2^4 = \log_2 16$, 得 $0 < x+2 < 16$, 所以 $B = (-2, 14)$, 于是 $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty, -2] \cup [14, +\infty)$.

故阴影部分为 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = (-\infty, -3] \cup [14, +\infty)$.

(2)因为 $C \subseteq B$,

所以 $C = \emptyset$ 或 $C \neq \emptyset$, 则

①当 $C = \emptyset$ 时, 则 $2a \geq a+1$, 即 $a \geq 1$.

②当 $C \neq \emptyset$ 时, 又 $C \subseteq B$, 所以 $2a < a+1$, 解得 $-1 \leq a < 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

21.解:(1)因为命题 $p: \frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{m-4} = 1$ 表示双曲线为真命题, 则 $(m-1)(m-4) < 0$, 解得 $1 < m < 4$. 所以实数 m 的取值范围是 $(1, 4)$.

(2)因为命题 $q: \frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{4-m} = 1$ 表示椭圆为真命题, 所以 $\begin{cases} m-2 > 0, \\ 4-m > 0, \\ m-2 \neq 4-m. \end{cases}$ 所以 $2 < m < 3$, 或 $3 < m < 4$. 因为 $\{m | 1 < m < 4\} \supseteq \{m | 2 < m < 3, \text{ 或 } 3 < m < 4\}$, 所以“命题 p 为真命题”是“命题 q 为真命题”的必要不充分条件.

22.解:(1)由 $q: (\lg x - t)[\lg x - (t+1)] \leq 0$, 得 $t \leq \lg x \leq t+1$, 所以 $10^t \leq x \leq 10^{t+1}$. 因为 $A = \{x | 10 \leq x \leq 100\}$, 所以 $t=1$.

(2)由 $|2^x-3| < 1$, 得 $1 < x < 2$. 设命题 p 表示的集合为 M , 则 $M = \{x | 1 < x < 2\}$. 设命题 q 表示的集合为 N , 则 $N = \{x | 10^t \leq x \leq 10^{t+1}\}$. 由题意知, $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 则 p 是 q 的充分不必要条件, 所以 $M \subsetneq N$.

所以 $\begin{cases} 10^t \leq 1, \\ 10^{t+1} \geq 2, \end{cases}$ 解得 $\lg 2 - 1 \leq t \leq 0$. 所以实数 t 的取值范围是 $[\lg 2 - 1, 0]$.

所以 $C = \emptyset$ 或 $C \neq \emptyset$, 则

①当 $C = \emptyset$ 时, 则 $2a \geq a+1$, 即 $a \geq 1$.

②当 $C \neq \emptyset$ 时, 又 $C \subseteq B$, 所以 $2a < a+1$, 解得 $-1 \leq a < 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

21.解:(1)因为命题 $p: \frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{m-4} = 1$ 表示双曲线为真命题, 则 $(m-1)(m-4) < 0$, 解得 $1 < m < 4$. 所以实数 m 的取值范围是 $(1, 4)$.

(2)因为命题 $q: \frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{4-m} = 1$ 表示椭圆为真命题, 所以 $\begin{cases} m-2 > 0, \\ 4-m > 0, \\ m-2 \neq 4-m. \end{cases}$ 所以 $2 < m < 3$, 或 $3 < m < 4$. 因为 $\{m | 1 < m < 4\} \supseteq \{m | 2 < m < 3, \text{ 或 } 3 < m < 4\}$, 所以“命题 p 为真命题”是“命题 q 为真命题”的必要不充分条件.

22.解:(1)由 $q: (\lg x - t)[\lg x - (t+1)] \leq 0$, 得 $t \leq \lg x \leq t+1$, 所以 $10^t \leq x \leq 10^{t$

① 所以由 $xy \leq ax^2 + 2y^2$,
得 $a \geq \frac{xy - 2y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

令 $t = \frac{y}{x}$, 结合 $x \in [1, 2]$ 及 $y \in [2, 3]$, 可得 $1 \leq t \leq 3$.

于是问题转化为 $a \geq -2t^2 + t$ 在 $t \in [1, 3]$ 上恒成立. 显然 $f(t) = -2t^2 + t$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减, 所以当 $t=1$ 时, $f(t)$ 取得最大值且为 -1 , 所以 $a \geq -1$. 所以实数 a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$.

三、解答题

17. 证明: 当 $x \geq 4$ 时, 要证 $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$, 只需证 $(\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2})^2 > (\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1})^2$,

需证 $x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2 > x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$, 即证 $\sqrt{(x-3)(x-2)} > \sqrt{(x-4)(x-1)}$, 只需证 $x^2-5x+6 > x^2-5x+4$, 即证 $6 > 4$, 显然上式成立, 所以原不等式成立, 即 $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$.

18. (1) 解: $f(x) > x+5 \Rightarrow |2x+1| > x+5 \Rightarrow 2x+1 > x+5$, 或 $2x+1 < -x-5 \Rightarrow x > 4$, 或 $x < -2$.

所以原不等式的解集为 $\{x | x > 4, \text{ 或 } x < -2\}$.

(2) 证明: $f(x) = |2x+1| = |2x-6y-2+6y+3| \leq 2|x-3y-1| + 3|2y+1| < \frac{2}{4} + \frac{3}{6} = 1$.

19. (1) 解: $f(x) = |2x-1| + |x+\frac{1}{2}|$

$$= \begin{cases} 3x - \frac{1}{2}, & x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{3}{2}, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

所以 $[f(x)]_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 所以 $m=1$.

(2) 证明: 因为 $a^2+b^3-a^2b-ab^2=(a^2-b^2) \cdot (a-b) = (a-b)^2(a+b) \geq 0$, $a+b+c=1$, 所以 $a^2+b^3 \geq a^2b+ab^2=ab(a+b)=ab(1-c)=ab-abc$. 同理可证: $b^3+c^3 \geq bc-abc$, $c^3+a^3 \geq ca-abc$. 三式相加, 得 $2(a^3+b^3+c^3) \geq ab+bc+ca-3abc$.

20. 解: (1) 要使不等式 $mx^2-2x-m+1 < 0$ 恒成立, 只需 $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4m(-m+1) < 0 \end{cases}$, 该不等式组无解, 所以不存在实数 m , 使对所有的实数 x , 不等式 $mx^2-2x-m+1 < 0$ 恒成立.

(2) 由 $|m| \leq 2$, 得 $-2 \leq m \leq 2$.

由 $mx^2-2x-m+1 < 0$,

得 $(x^2-1)m - 2x + 1 < 0$.

令 $f(m) = (x^2-1)m - 2x + 1$ ($-2 \leq m \leq 2$), 则 $f(m) < 0$.

当 $x=1$ 时, $f(m) = -1 < 0$, 满足题意;

当 $x=-1$ 时, $f(m) = 3 > 0$, 不满足题意;

当 $x \neq \pm 1$ 时, 要使 $f(m) < 0$,

只需 $\begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} (x^2-1)(-2) - 2x + 1 < 0 \\ (x^2-1) \times 2 - 2x + 1 < 0 \end{cases}$,

解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

综上, x 的取值范围是

$$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

21. 解: (1) 当 $m=1$ 时, $f(x) = |x-3| + |x+1|$.

所以 $f(x) \geq 6$, 即 $|x-3| + |x+1| \geq 6$,

当 $x \leq -1$ 时, $-(x+1) - (x-3) \geq 6$,

解得 $x \leq -2$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $(x+1) - (x-3) \geq 6$,

此时无解;

当 $x \geq 3$ 时, $(x+1) + (x-3) \geq 6$,

解得 $x \geq 4$.

综上, 不等式的解集是 $\{x | x \leq -2, \text{ 或 } x \geq 4\}$.

(2) 因为 $|x-3| + |x+m| \geq |(x-3) - (x+m)| = |m+3|$,

所以 $[f(x)]_{\min} = |m+3|$,

所以 $|m+3| \leq 5$,

所以 $-8 \leq m \leq 2$,

所以实数 m 的取值范围是 $[-8, 2]$.

22. 解: (1) 因为 $k > 0$, $f(x) > m$,

即 $\frac{kx}{x^2+3k} > m$,

所以 $mx^2 - kx + 3km < 0$.

因为不等式 $mx^2 - kx + 3km < 0$ 的解集为 $\{x | x < -3, \text{ 或 } x > -2\}$,

所以 $-3, -2$ 是方程 $mx^2 - kx + 3km = 0$ 的根, 且 $m < 0$,

所以 $\begin{cases} \frac{k}{m} = -5 \\ 3k = 6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = 2 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases}$.

所以 $5mx^2 + \frac{k}{2}x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 < 0$,

解得 $-1 < x < \frac{3}{2}$,

所以不等式 $5mx^2 + \frac{k}{2}x + 3 > 0$ 的解集为

$$\{x | -1 < x < \frac{3}{2}\}.$$

(2) 因为 $f(x) > 1$, 所以 $\frac{kx}{x^2+3k} > 1$, 所以

$x^2 - kx + 3k < 0$, 令 $g(x) = x^2 - kx + 3k$, $x \in (3, +\infty)$, 存在 $x_0 > 3$, 使得 $f(x_0) > 1$ 成立, 即存在 $g(x_0) < 0$ 成立, 即 $[g(x)]_{\min} < 0$ 成立. 当 $0 < k \leq 6$ 时,

$g(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(3) = 9$, 显然不存在 $g(x) < 0$; 当 $k > 6$ 时, $g(x)$

在 $(3, \frac{k}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{k}{2}, +\infty)$ 上单调

递增, 所以 $[g(x)]_{\min} = g\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} + 3k$, 由

$-\frac{k^2}{4} + 3k < 0$, 又 $k > 0$, 可得 $k > 12$.

综上, k 的取值范围是 $(12, +\infty)$.

第3期

第2-3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A 2.A 3.B 4.C 5.D 6.D 7.D

8.A 9.B 10.D 11.A

12.B

提示: 由 $x+2y+4=4xy$, 得 $x+2y=4xy-4$, 不等式可化为 $(4xy-4)a^2+2a+2xy-34 \geq 0$ 恒成立, 化简, 得 $xy \geq \frac{2a^2-a+17}{2a^2+1}$ 恒成立. 根据

基本不等式, 有 $x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$, 所以 $4xy = x+2y+4 \geq 4+2\sqrt{2xy}$, 即 $2(\sqrt{xy})^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy} - 2 \geq 0$, 解得 $\sqrt{xy} \geq \sqrt{2}$, 所以 $xy \geq$

2. 所以 $\frac{2a^2-a+17}{2a^2+1} \leq 2$, 解得 $a \leq -3$, 或 $a \geq \frac{5}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup$

$[\frac{5}{2}, +\infty)$.

二、填空题

13.6 14.4 15.5+2√6

16. $\frac{1}{2}$

提示: 画出平面区域 D, 如图所示. $\angle PAB = \angle AOP$, 设 $P(x, y)$, 则 $\cos \angle PAB = \cos \angle AOP = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 当 $\angle PAB$ 最小

时, $\cos \angle PAB$ 最大, 即 $\sqrt{x^2+y^2}$ 最小, P 点即为可行域内离原点最近的点, 此时 OP 垂直于直线 $3x+4y-10=0$, $|OP| = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}} =$

$\frac{10}{5} = 2$, 所以 $\cos \angle PAB$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

19. 解: (1) 不等式 $|x-1| + |x+1| < m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m > (|x-1| + |x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1| + |x+1| \geq |x-1-x-1| = 2$, 所以 $m > 2$, 故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 由 (1) 得 $m > 2$, 则 $f(m) = m + \frac{1}{(m-2)^2} = \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{(m-2)^2} + 2$, 所以

$f(m) \geq 3\sqrt{\frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{(m-2)^2}} + 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$,

当且仅当 $t = \frac{32}{t}$, 即 $t = 4\sqrt{2}$ 时, 取

等号, 所以 $b \geq 24 - 16\sqrt{2}$, 所以 b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

答: 要使接下来的 2 天中, 营养液能够持续有效, b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

19. 解: (1) 不等式 $|x-1| + |x+1| < m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m > (|x-1| + |x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1| + |x+1| \geq |x-1-x-1| = 2$, 所以 $m > 2$, 故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 由 (1) 得 $m > 2$, 则 $f(m) = m + \frac{1}{(m-2)^2} = \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{(m-2)^2} + 2$, 所以

$f(m) \geq 3\sqrt{\frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{(m-2)^2}} + 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$,

当且仅当 $t = \frac{32}{t}$, 即 $t = 4\sqrt{2}$ 时, 取

等号, 所以 $b \geq 24 - 16\sqrt{2}$, 所以 b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

答: 要使接下来的 2 天中, 营养液能够持续有效, b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

19. 解: (1) 不等式 $|x-1| + |x+1| < m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m > (|x-1| + |x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1| + |x+1| \geq |x-1-x-1| = 2$, 所以 $m > 2$, 故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} =$

$ab+bc+ca$, 所以 $ab+bc \geq 2\sqrt{ab^2c} = 2\sqrt{b}$,

$ab+ac \geq 2\sqrt{ab^2c} = 2\sqrt{a}$,

$bc+ac \geq 2\sqrt{abc^2} = 2\sqrt{c}$, 三式相加, 得

$2(ab+bc+ca) \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, 所以 $ab+bc+ca \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, 即 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

18. 解: (1) 若营养液有效, 则需满足 $y \geq 4$, 所以 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 4 \cdot \frac{4+x}{4-x} \geq 4 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} 2 < x \leq 5 \\ 4(5-x) \geq 4 \end{cases}$,

解得 $0 \leq x \leq 2$ 或 $2 < x \leq 4$, 所以 $0 \leq x \leq 4$, 所以只投放一次 4 个单位的营养液, 有效时间可达 4 天.

(2) 设第二次投放营养液的持续时间为 x 天, 则此时第一次投放营养液的持续时间为 $(x+3)$ 天, 且 $0 \leq x \leq 2$;

设 y_1 为第一次投放营养液的浓度, y_2 为第二次投放营养液的浓度, y 为水中的营养液的浓度. 所以 $y_1 = 2[5 - (x+3)] = 4 - 2x$, $y_2 = b \cdot \frac{4+x}{4-x}$, $y = y_1 + y_2 = 4 - 2x + b \cdot \frac{4+x}{4-x}$.

问题等价于 $y \geq 4$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, 即 $b \geq 2x \cdot \frac{4-x}{4+x}$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立.

令 $t = 4+x$, $t \in [4, 6]$, 则 $b \geq -2\left(t + \frac{32}{t}\right) + 24$. 又 $-2\left(t + \frac{32}{t}\right) + 24 \leq 24 - 2 \times 2\sqrt{t \cdot \frac{32}{t}} = 24 - 16\sqrt{2}$,

当且仅当 $t = \frac{32}{t}$, 即 $t = 4\sqrt{2}$ 时, 取

等号, 所以 $b \geq 24 - 16\sqrt{2}$, 所以 b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

答: 要使接下来的 2 天中, 营养液能够持续有效, b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

19. 解: (1) 不等式 $|x-1| + |x+1| < m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m > (|x-1| + |x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1| + |x+1| \geq |x-1-x-1| = 2$, 所以 $m > 2$, 故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 由 (1) 得 $m > 2$, 则 $f(m) = m + \frac{1}{(m-2)^2} = \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{(m-2)^2} + 2$, 所以

$f(m) \geq 3\sqrt{\frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{(m-2)^2}} + 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$,

当且仅当 $t = \frac{32}{t}$, 即 $t = 4\sqrt{2}$ 时, 取

等号, 所以 $b \geq 24 - 16\sqrt{2}$, 所以 b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

答: 要使接下来的 2 天中, 营养液能够持续有效, b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

19. 解: (1) 不等式 $|x-1| + |x+1| < m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m > (|x-1| + |x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1| + |x+1| \geq |x-1-x-1| = 2$, 所以 $m > 2$, 故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 由 (1) 得 $m > 2$, 则 $f(m) = m + \frac{1}{(m-2)^2} = \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{2}(m-2) + \frac{1}{(m-2)^2} + 2$, 所以

$f(m) \geq 3\sqrt{\frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{(m-2)^2}} + 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$,

当且仅当 $t = \frac{32}{t}$, 即 $t = 4\sqrt{2}$ 时, 取

等号, 所以 $b \geq 24 - 16\sqrt{2}$, 所以 b 的最小值为 $24 - 16\sqrt{2}$.

当且仅当 $\frac{1}{2}(m-2) = \frac{1}{(m-2)^2}$,

即 $m = \sqrt{2} + 2 > 2$ 时, 等号成立,

所以函数 $f(m) = m + \frac{1}{(m-2)^2}$ 的最小

值为 $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$.

20. 解: 设空调机、洗衣机五一假期的进货量分别为 x, y 台, 总利润为 z 百元.

由题意有 $\begin{cases} 30x+20y \leq 440 \\ 7x+10y \leq 156 \end{cases}$, 化简为 $\begin{cases} 3x+2y \leq 44 \\ 7x+10y \leq 156 \end{cases}$, 画出可行域, 如图所示. 由图可知: 直线 $y = -\frac{5}{4}x + \frac{z}{8}$ 过 $A(8, 10)$ 点时纵截距最大, 即目标函数 z 最大, 此时 $z = 10 \times 8 + 8 \times 10 = 160$ 百元. 故当进货量为空调机 8 台, 洗衣机 10 台时, 五一假期的总利润最大, 最大利润是 16000 元.

21. 解: (1) 由题意知, 可行域 M 如图所示.

由 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$, 所以 $A(1, \frac{1}{2})$.

由 $\begin{cases} x=1 \\ 2x+y=10 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, 所以 $B(1, 8)$.

由 $\begin{cases} 2x+y=10 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$, 所以 $C(4, 2)$.

因为 $k_{AC} = \frac{1}{2}$, $z_1 = y - 2x$, 所以 $y = 2x + z_1$, z_1 是 y 轴的截距, $k = 2 >$

$k_{AC} = \frac{1}{2}$, 所以过点 $B(1, 8)$ 时, $(z_1)_{\max} = 8 - 2 \times 1 = 6$.

因为 $z_2 = x^2 + y^2$ 表示区域 M 上的点 (x, y) 到原点 $O(0, 0)$ 距离的平方, 如图, 点 $A(1, \frac{1}{2})$ 使所求距离的平方最小, 所以 $(z_2)_{\min} = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$.

21. 解: (1) 由题意知, 可行域 M 如图所示.

由 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$, 所以 $A(1, \frac{1}{2})$.

由 $\begin{cases} x=1 \\ 2x+y=10 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, 所以 $B(1, 8)$.

由 $\begin{cases} 2x+y=10 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$, 所以 $C(4, 2)$.

因为 $k_{AC} = \frac{1}{2}$, $z_1 = y - 2x$, 所以 $y = 2x + z_1$, z_1 是 y 轴的截距, $k =$