第 36 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CDACCB　7~12.CBBDCD

二、填空题

13.3　14.$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　15.$2\sqrt{3}$

16.$\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 或 2

三、解答题

17.**解**:$f(x)\leqslant g(x)$,$a+\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\frac{4}{3}\cdot x+1$,$\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\frac{4}{3}x+1-a$.

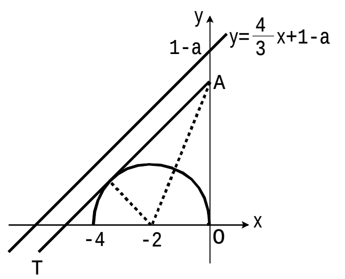
令 $y=\sqrt{-x^2-4x}$,①

$y=\frac{4}{3}x+1-a$,②

①式变形,得$(x+2)^2+y^2=4(y\geqslant0)$,即表示以$(-2,0)$为圆心,2 为半径的圆的上半个圆;

②表示斜率为$\frac{4}{3}$,纵截距为 $1-a$ 的平行直线系.如下图,设上述平行直线系中与圆相切的直线为 AT,其倾斜角为 α,则有 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 即 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

$|OA|=2\tan\frac{90°+\alpha}{2}=2\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=6$.要使 $f(x)\leqslant g(x)$在 $x\in[-4,0]$时恒成立,则②所表示的直线应该在直线 AT 的上方或与它重合,故有 $1-a\geqslant6$,所以 $a\leqslant-5$.所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,-5]$.



(第 17 题图)

18.**解**:(1)由图象可以得到函数 $f(x)$的振幅 $A=3$.

设函数 $f(x)$的周期为 T,

则$\frac{3}{4}T=4\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{15\pi}{4}$,

所以 $T=5\pi$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{5\pi}=\frac{2}{5}$.

由 $f(x)$过$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$,

得 $3\sin\left(\frac{2}{5}\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$,

得$\frac{2}{5}\times\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{10}(k\in\mathbf{Z})$,

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{10}$,

所以$f(x)=3\sin\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{10}\right)$.

(2)令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{10}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$,得$\frac{3}{2}\pi+5k\pi\leqslant x\leqslant4\pi+5k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(\frac{3}{2}\pi+5k\pi,4\pi+5k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

函数$f(x)$的最大值为 3,

当且仅当$\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=\frac{3}{2}\pi+5k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,函数 $f(x)$取得最大值.

所以函数 $f(x)$的最大值为 3,

取得最大值时 x 的集合为

$\left\{x\left|x=\frac{3}{2}\pi+5k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

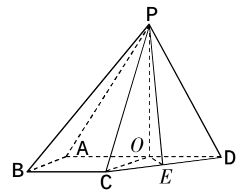
19.(1)**证明**:四棱锥 $P-ABCD$ 中,因为$\angle BAD=\angle ABC=90°$,所以 $BC/\!/AD$.因为 $AD\subset$平面 PAD,$BC\not\subset$平面 PAD,所以直线 $BC/\!/$平面 PAD.

(2)**解**:如下图所示,取 AD 中点 O,CD 中点 E,连接 PO,OC,OE,PE,则 $PO\perp AD$,$OE\perp CD$. 因为平面 $PAD\perp$平面 ABCD,所以 $PO\perp$平面 ABCD.设 $AD=2x$,则 $AB=BC=x$,$CD=\sqrt{2}x$,$OE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,$PO=\sqrt{3}x$,

$PE=\sqrt{PO^2+OE^2}=\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{2}}$.因为$\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$,所以$\frac{1}{2}PE\cdot CD=2\sqrt{7}$,所以$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}x\cdot\sqrt{2}x=2\sqrt{7}$,解得 $x=2$,

所以 $PO=2\sqrt{3}$.

则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(BC+AD)\times AB\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



(第 19 题图)

20.**解**:(1)当 $0\leqslant x\leqslant200$ 时,$y=0.5x$;

当 $200<x\leqslant400$ 时,

$y=0.5\times200+0.8\times(x-200)=0.8x-60$;

当 $x>400$ 时,

$y=0.5\times200+0.8\times200+1.0\times(x-400)=x-140$.

所以 y 与 x 之间的函数解析式为:

$$y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant200,\\0.8x-60,200<x\leqslant400,\\x-140,x>400.\end{cases}$$

(2)由(1)可知:当 $y=260$ 时,$x=400$,

则 $P(x\leqslant400)=0.80$.

结合频率分布直方图可知:

$0.1+2\times100B+0.3=0.8$,$100A+0.05=0.2$,

所以 $A=0.0015$,$B=0.0020$.

(3)由题意可知 x 可取 50,150,250,350,450,550.

当 $x=50$ 时,$y=0.5\times50=25$,

所以 $P(y=25)=0.1$;

当 $x=150$ 时,$y=0.5\times150=75$,

所以 $P(y=75)=0.2$;

当 $x=250$ 时,$y=0.8\times250-60=140$,

所以 $P(y=140)=0.3$;

当 $x=350$ 时,$y=0.8\times350-60=220$,

所以 $P(y=220)=0.2$;

当 $x=450$ 时,

$y=450-140=310$,

所以 $P(y=310)=0.15$;

当 $x=550$ 时,

$y=550-140=410$,

所以 $P(y=410)=0.05$.

故 $\overline{y}=25\times0.1+75\times0.2+140\times0.3+220\times0.2+310\times0.15+410\times0.05=170.5$.

所以,估计 1 月份该市居民用户平均用电费用为 170.5 元.

21.(1)**证明**:$f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=(a^x-1)\ln a+2x$.

因为 $a>1$,$x<0$,

所以 $a^x-1<0$,$\ln a>0$,$2x<0$.

所以当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

(2)**解**:易知当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则 $f(0)=1$ 为 $f(x)$的最小值.

$|f(x)-t|-1=0\Rightarrow f(x)=t+1$,或 $f(x)=t-1$,

要使函数 $y=|f(x)-t|-1$ 有四个零点,需 $t+1>1$ 且 $t-1>1$,所以 $t>2$.所以 t 的取值范围为$(2,+\infty)$.

(3)**解**:因为 $a>1$,所以 $f(1)=a+1-\ln a>f(-1)=\frac{1}{a}+1+\ln a>f(0)=1$.

又因为 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,所以对$\forall x_1,x_2\in[-1,1]$,$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(1)-f(0)|=a-\ln a$.要使对$\forall x_1,x_2\in[-1,1]$,$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$ 恒成立,只要 $a-\ln a\leqslant e-1$ 成立即可.

设 $h(a)=a-\ln a(a>1)$,易知 $h'(a)=1-\frac{1}{a}>0$,函数 $h(a)$在$(1,+\infty)$上为增函数,而 $h(e)=e-1$,所以由 $h(a)\leqslant h(e)$,得 $1<a\leqslant e$.所以 a 的取值范围为$(1,e]$.

22.**解**:(1)由题意,可得 $c=1$.

因为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,

所以 $a=2$,所以 $b^2=a^2-c^2=3$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

所以椭圆 C 的右顶点为 $A(2,0)$,

代入圆 F 的方程,可得 $r^2=1$,

所以圆 F 的方程为$(x-1)^2+y^2=1$.

(2)假设存在直线 l 满足题意,

由(1)可得 OA 是圆 F 的直径,

所以 $OP\perp AB$.

由点 P 是 AB 的中点,

可得$|OB|=|OA|=2$.

设点 $B(x_1,y_1)$,

则由题意可得$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$.

因为直线 l 的斜率不为 0,所以 $x_1^2<4$,

所以$|OB|^2=x_1^2+y_1^2=x_1^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)=3+\frac{x_1^2}{4}<4$,

这与$|OA|=|OB|$矛盾,所以不存在满足条件的直线 l.

第 33 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CBAACA　7~12.AADACB

二、填空题

13.$115_{(8)}$

14.1

15.6

16.A

三、解答题

17.**解**:(1)由已知得 $\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$,

所以 $\bar{z}^2+\bar{z}+1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}+1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}+1=0$.

(2)因为 $z^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$,

所以 $S_{2019}=1+z+z^2+\cdots+z^{2018}=\frac{1\times(1-z^{2019})}{1-z}=\frac{1-(z^3)^{673}}{1-z}=0$.

18.(1)**证明**:对 $F(x)$求导数,

得 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

因为 $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$,$x>0$,所以 $xf'(x)>f(x)$,即 $xf'(x)-f(x)>0$,所以 $F'(x)>0$.

故 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数.

(2)**证明**:因为 $x_1>0$,$x_2>0$,

所以 $0<x_1<x_1+x_2$.

由(1),知 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数.

所以 $F(x_1)<F(x_1+x_2)$,

即$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$.

因为 $x_1>0$,所以 $f(x_1)<\frac{x_1}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)$.

同理,可得 $f(x_2)<\frac{x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)$.

以上两式相加,

得 $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$.

(3)**解**:(2)中结论的推广形式为:

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,+\infty)$,其中 $n\geqslant2$,则 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

证明如下:

因为 $x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0$,

所以 $0<x_1<x_1+x_2+\cdots+x_n$.

由(1),知 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数,

所以 $F(x_1)<F(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

即$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$.

因为 $x_1>0$,

所以 $f(x_1)<\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

同理,可得

$f(x_2)<\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

$f(x_3)<\frac{x_3}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

…

$f(x_n)<\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

以上 n 个不等式相加,得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

19.**证明**:(1)因为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$,$(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2=c+d+2\sqrt{cd}$,

又 a,b,c,d 均为正数, 且 $a+b=c+d$,$ab>cd$,所以$\sqrt{ab}>\sqrt{cd}$,

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

(2)①若$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$,

则$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

即 $a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}$.

由 $a+b=c+d$,得 $ab>cd$,

又$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$,

$(c-d)^2=(c+d)^2-4cd$,

所以$(a-b)^2<(c-d)^2$,

所以$|a-b|<|c-d|$;

②若$|a-b|<|c-d|$,

则$(a-b)^2<(c-d)^2$,

即有$(a+b)^2-4ab<(c+d)^2-4cd$,

由 $a+b=c+d$,得 $ab>cd$,

则有$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

综上,$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是$|a-b|<|c-d|$的充要条件.

20.**解**:(1)根据所给数据,知众数是出现次数最多的数,为[6.5,7.5)的组中值 7;

中位数两边频率相等,不妨设为 x,则 $0.04+0.12+(x-6.5)\times0.4=0.5$,$x=7.35$.

(2)根据题目中算法流程图,用计算机统计平均睡眠时间,总共执行 6 次循环, 则判断框①中应填入的条件是 $i\geqslant6$(或 $i=6$ 或 $i>5$);

(3)设第 1 组 2 个同学的睡眠时间为 A、B,第 5 组 3 个同学的睡眠时间为 c、d、e,则从第 1 组和第 5 组中随机取出 2 个数据, 包含的基本事件有 AB、Ac、Ad、Ae、Bc、Bd、Be、cd、ce、de 共 10 个, 其中满足时间差的绝对值大于 1 小时的基本事件有 Ac、Ad、Ae、Bc、Bd、Be 共 6 个,故所求的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

21.(1)**证明**:①$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

②假设 T 是函数 $f(x)=\tan x$ 的一个周期, 且 $0<T<\pi$, 则对任意 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,有 $\tan(x+T)=\tan x$,令 $x=0$ 得 $\tan T=0$,而当 $0<T<\pi$ 时,$\tan T\neq0$ 恒成立或 $\tan T$ 无意义,矛盾,所以假设不成立,原命题成立.

(2)**解**:由(1)可类比出函数 $f(x)$是周期函数,它的最小正周期是 $4a$.

证明: 因为 $f(x+2a)=f(x+a+a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$,

所以 $f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$.

所以 $f(x)$是以 4a 为最小正周期的周期函数.

22.(1)**解**:当 $a=2$ 时,$f(x)=x^2-2x+\ln(x+1)$,$f'(x)=2x-2+\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2-1}{x+1}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $x>-1$,所以当 $x\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$; 当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,所以函数 $f(x)$的极大值点为 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,极小值点为 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)**解**:因为 $f'(x)=2x-a+\frac{1}{x+1}$,由 $f'(x)>x$,得 $2x-a+\frac{1}{x+1}>x$,即 $a<x+\frac{1}{x+1}$ $(0<x<1)$,所以问题等价为在区间$(0,1)$上恒有 $a<x+\frac{1}{x+1}$.又 $x+\frac{1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-1>1$,所以 $a\leqslant1$.所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,1]$.

第 34 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.BAABBA　7~12.DCDADD

二、填空题

13.$S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$

14.平行四边形

15.$8\sqrt{2}-8$

16.①②③④

三、解答题

17.**解**:(1)由已知,得 $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$,

因为 $A=\pi-(B+C)$,

所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以 $\cos B\sin C=\sin C\sin B$,

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin B=\cos B$.

由 $B\in(0,\pi)$,得 $B=\frac{\pi}{4}$.

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$.

由余弦定理,得 $4=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{4}$,

又 $a^2+c^2\geqslant 2ac$,故 $ac\leqslant\frac{4}{2-\sqrt{2}}$,当且仅当 $a=c$ 时,等号成立,所以 $S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{4}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$,所以△ABC 面积的最大值为 $\sqrt{2}+1$.

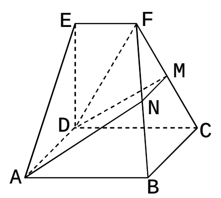
18.(1)**证明**:因为底面 $ABCD$ 为矩形,所以 $CD\perp AD$.又因为 $CD\perp EA$,$AD\cap EA=A$,所以 $CD\perp$ 平面 EAD.所以 $CD\perp ED$.

(2)**证明**:因为底面 $ABCD$ 为矩形,所以 $AD/\!/BC$. 因为 $AD\not\subset$ 平面 FBC,$BC\subset$ 平面 FBC,所以 $AD/\!/$ 平面 FBC.又因为平面 $ADMN\cap$ 平面 $FBC=MN$,所以 $AD/\!/MN$.

(3)**解**:平面 $ADMN$ 与平面 BCF 可以垂直.证明如下:

连接 DF.

因为 $AD\perp ED$,$AD\perp CD$,$ED\cap CD=D$,所以 $AD\perp$ 平面 $CDEF$,所以 $AD\perp DM$.因为 $AD/\!/MN$, 所以 $DM\perp MN$. 因为平面 $ADMN\cap$ 平面 $FBC=MN$, 若使平面 $ADMN\perp$ 平面 BCF, 则需 $DM\perp$ 平面 BCF, 即 $DM\perp FC$. 在梯形 $CDEF$ 中, 因为 $EF/\!/CD$,$DE\perp CD$,$CD=2EF=2$,$ED=\sqrt{3}$, 所以 $DF=DC=2$.所以若使 $DM\perp FC$ 能成立,则 M 为 FC 的中点.所以 $\frac{FM}{FC}=\frac{1}{2}$.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)由已知 $S_n=2a_n-a_1$,有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$.从而 $a_2=2a_1$,$a_3=2a_2=4a_1$. 又因为 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列,所以 $a_1+a_3=2(a_2+1)$.所以 $a_1+4a_1=2(2a_1+1)$,解得 $a_1=2$.所以数列$\{a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列.故 $a_n=2^n(n\in N_+)$.

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}$,所以 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$.由 $|T_n-1|<\frac{1}{1000}$,得 $\left|1-\frac{1}{2^n}-1\right|<\frac{1}{1000}$,即 $2^n>1000$.因为 $2^9=512<1000<1024=2^{10}$,所以 $n\geqslant 10$.于是,使 $|T_n-1|<\frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值为 10.

20. **解**:(1) 由已知, 得 $f(x)=\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5}{6}\pi,\frac{\pi}{6}\right]$.所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,所以 $f(x)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$.所以 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$,最小值为 $-\frac{1}{2}$.

21.(1)**解**:$f'(x)=\frac{1}{x}-2a$,因为 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线平行于直线 $x+y-2=0$,所以 $f'(1)=1-2a=-1$,即 $a=1$.所以 $f(x)=\ln x-2x$,$f'(x)=\frac{1}{x}-2$.令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1-\ln 2$.

(2)**证明**:$g(x)=\ln x-2ax+\frac{1}{2}x^2$,$g'(x)=x+\frac{1}{x}-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}$.令 $g'(x)=0$,得 $x^2-2ax+1=0$.①当 $\Delta=4a^2-4\leqslant 0$,即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时,$x^2-2ax+1\geqslant 0$ 恒成立,即 $g'(x)\geqslant 0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)$ 无极值点,不符合题意;②当 $\Delta=4a^2-4>0$,即 $a>1$,或 $a<-1$ 时,方程 $g'(x)=0$ 有两解 x_1,x_0,因为 x_0 是 $g(x)$ 的极大值点,所以 $0<x_0<x_1$,又 $x_1x_0=1$,$x_1+x_0=2a>0$,所以 $a>1$,$0<x_0<1$.又 $g'(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}-2a=0$,所以 $a=\frac{x_0^2+1}{2x_0}$.所以 $x_0f(x_0)+1+ax_0^2=x_0\ln x_0-\frac{x_0^3+x_0}{2}+1$.设 $h(x)=x\ln x-\frac{x^3+x}{2}+1(x\in(0,1))$,则 $h'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}+\ln x$,$h''(x)=-3x+\frac{1}{x}=\frac{1-3x^2}{x}$,所以当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$h''(x)>0$;当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时,$h''(x)<0$.所以 $h'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ 上单调递减,

所以 $h'(x)\leqslant h'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\ln\frac{\sqrt{3}}{3}<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

所以 $h(x_0)>h(1)=0$,

即 $x_0\ln x_0-\frac{x_0^3+x_0}{2}+1>0$,

所以 $x_0f(x_0)+1+ax_0^2>0$.

22.(1)**证明**:因为直线 $OP:y=k_1x$ 以及 $OQ:y=k_2x$ 与圆 M 相切, 所以 $\frac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\sqrt{2}$,

化简,得 $(x_0^2-2)k_1^2-2x_0y_0k_1+y_0^2-2=0$,

同理 $(x_0^2-2)k_2^2-2x_0y_0k_2+y_0^2-2=0$.

所以 k_1,k_2 是方程 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-2=0$ 的两个不相等的实数根, 所以 $k_1k_2=\frac{y_0^2-2}{x_0^2-2}$.

因为点 $M(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上,

所以 $\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{3}=1$,即 $y_0^2=3-\frac{1}{2}x_0^2$,

所以 $k_1k_2=\frac{1-\frac{1}{2}x_0^2}{x_0^2-2}=-\frac{1}{2}$.故 k_1k_2 为定值.

(2)**解**:$|OP|^2+|OQ|^2$ 是定值,定值为 9.

理由如下:

当直线 OP,OQ 不与坐标轴重合时,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=k_1x,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1^2=\frac{6}{1+2k_1^2},\\ y_1^2=\frac{6k_1^2}{1+2k_1^2}.\end{cases}$ 所以 $x_1^2+y_1^2=\frac{6(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}$.同理,$x_2^2+y_2^2=\frac{6(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}$.由 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$,所以 $|OP|^2+|OQ|^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=\frac{6(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}+\frac{6(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}=\frac{6(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}+\frac{6\left[1+\left(-\frac{1}{2k_1}\right)^2\right]}{1+2\left(-\frac{1}{2k_1}\right)^2}=\frac{9+18k_1^2}{1+2k_1^2}=9$.

当直线 OP,OQ 与坐标轴重合时,显然有 $|OP|^2+|OQ|^2=9$.

综上,$|OP|^2+|OQ|^2=9$.

第 35 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.ACDACA　7~12.ACDAAB

二、填空题

13.$-\frac{\sqrt{10}}{5}$

14.$64\pi cm^2$

15.$\frac{2}{5}$

16.①②④

三、解答题

17.**解**:因为 p 且 $\neg q$ 为真命题,所以 p 真,$\neg q$ 真.

p 真 $\Rightarrow\frac{3a-5}{9-a}>0\Rightarrow\frac{5}{3}<a<9$;

$\neg q$ 真 $\Rightarrow|5-a|\geqslant 1\Rightarrow a\leqslant 4$,或 $a\geqslant 6$.

所以 $\frac{5}{3}<a\leqslant 4$,或 $6\leqslant a<9$.

所以使 p 且 $\neg q$ 为真命题的实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{5}{3},4\right]\cup[6,9)$.

18.(1)**证明**:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BC/\!/AD$.

因为 $BC\not\subset$ 平面 ADE,$AD\subset$ 平面 ADE,所以 $BC/\!/$ 平面 ADE.

因为四边形 $BDEF$ 是矩形,

所以 $BF/\!/DE$.

因为 $BF\not\subset$ 平面 ADE,$DE\subset$ 平面 ADE,所以 $BF/\!/$ 平面 ADE.

又 $BC,BF\subset$ 平面 BCF,

且 $BC\cap BF=B$,

所以平面 $BCF/\!/$ 平面 AED.

(2)**解**:连接 AC,交 BD 于点 O.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形,

所以 $AO\perp BD$.

又因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,$AO\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AO\perp ED$.

因为 $BD\cap ED=D$,

所以 $AO\perp$ 平面 $BDEF$.

所以 AO 是四棱锥 $A-BDEF$ 的高.

因为 $AB=AD$,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,

所以 $BF=BD=AB=a$,

所以 $AO=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

所以四棱锥 $A-BDEF$ 的体积

$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}a\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

19.**证明**:(1)由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$,

得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$,

因为 $a_1=1$,$a_2=3$,所以 $a_2-a_1=2$,

所以$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列.

所以 $a_{n+1}-a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$,

则 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

(2)$b_n=\log_2(a_n+1)=\log_2 2^n=n$,$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

20.**解**:(1)设曲线 AF 所在抛物线的方程为 $y=ax^2(a>0)$,

因为抛物线过点 $F(2,4)$,

所以 $4=a\times 2^2$,得 $a=1$,

所以曲线 AF 所在抛物线的方程为 $y=x^2$.

(2)按(1)的直角坐标系,

则 $E(0,4)$,$C(2,6)$,

所以 EC 所在直线的方程为 $y=x+4$.

设 $P(x,x^2)(0<x<2)$,

则 $PO=x$,$OE=4-x^2$,$PR=4+x-x^2$,

所以公园的面积 $S=\frac{1}{2}(4-x^2+4+x-x^2)\cdot x=-x^3+\frac{1}{2}x^2+4x(0<x<2)$,

所以 $S'=-3x^2+x+4$.

令 $S'=0$,得 $x=\frac{4}{3}$,或 $x=-1$(舍去),

当 x 变化时,S' 和 S 的变化情况如下表:

x	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$
S'	+	0	-
S	↗	极大值 $\frac{104}{27}$	↘

当 $x=\frac{4}{3}$ 时,S 取得最大值 $\frac{104}{27}$.

故公园的最大面积为 $\frac{104}{27}km^2$.

21.**解**:(1)因为直线 $y=bx+2$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切,所以 $\frac{2}{\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{2}$,解得 $b=1$.因为椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\frac{a^2-1}{a^2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$,解得 $a^2=3$,所以所求椭圆的方程是 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)直线 $y=kx+2$ 代入椭圆方程,

消去 y,可得 $(1+3k^2)x^2+12kx+9=0$,

所以 $\Delta=36k^2-36>0$,

所以 $k>1$,或 $k<-1$.

设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

则有 $x_1+x_2=-\frac{12k}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{9}{1+3k^2}$.

若以 CD 为直径的圆过点 E,

则 $EC\perp ED$,

因为 $\overrightarrow{EC}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{ED}=(x_2-1,y_2)$,

所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$,

所以 $(1+k^2)x_1x_2+(2k-1)(x_1+x_2)+5=0$,

所以 $(1+k^2)\times\frac{9}{1+3k^2}+(2k-1)\times\left(-\frac{12k}{1+3k^2}\right)+5=0$,解得 $k=-\frac{7}{6}<-1$,

所以存在实数 $k=-\frac{7}{6}$,使得以 CD 为直径的圆过定点 E.

22.(1)**解**:$f'(x)=e^{-x}(1-x)$.由 $f'(x)>0$,得 $x<1$;由 $f'(x)<0$,得 $x>1$.所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1)$,单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\frac{1}{e}$,无极小值.

(2)**证明**:因为函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $g(x)=f(2-x)=(2-x)e^{x-2}$.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$,

则 $F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$,

所以 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)\cdot e^{-x}$.

因为 $x>1$,所以 $F'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增,

所以 $F(x)>F(1)=0$,

所以 $f(x)>g(x)$.