

第33期
第2-3版专题检测题参考答案

- 一、选择题
1-6.BBAACA 7-12.AABACB
二、填空题
13.115.8
14.1
15.6
16.900
三、解答题

17. 解:(1)由已知得 $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$,
 $\frac{\sqrt{3}i}{2}$,

所以 $\bar{z}^2 + \bar{z} + 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} + 1 = 0$.

(2)因为 $z^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1$,
所以 $S_{2019} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2018} = \frac{1 \times (1 - z^{2019})}{1 - z} = \frac{1 - (z^3)^{673}}{1 - z} = 0$.

18.(1)证明:对 $F(x)$ 求导数,
得 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

因为 $f'(x) > \frac{f(x)}{x}, x > 0$, 所以 $xf'(x) > f(x)$, 即 $xf'(x) - f(x) > 0$, 所以 $F'(x) > 0$.

故 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

(2)证明:因为 $x_1 > 0, x_2 > 0$,
所以 $0 < x_1 < x_1 + x_2$.

由(1), 知 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

所以 $F(x_1) < F(x_1 + x_2)$,
即 $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}$.

因为 $x_1 > 0$, 所以 $f(x_1) < \frac{x_1}{x_1 + x_2} f(x_1 + x_2)$.

同理, 可得 $f(x_2) < \frac{x_2}{x_1 + x_2} f(x_1 + x_2)$.

以上两式相加,
得 $f(x_1) + f(x_2) < f(x_1 + x_2)$.

(3)解:(2)中结论的推广形式为:
设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, +\infty)$, 其中 $n \geq 2$,
则 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) < f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

证明如下:
因为 $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$,
所以 $0 < x_1 < x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

由(1), 知 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

所以 $F(x_1) < F(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$,
即 $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$.

因为 $x_1 > 0$,
所以 $f(x_1) < \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

同理, 可得
 $f(x_2) < \frac{x_2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$,

$f(x_3) < \frac{x_3}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$,
...

$f(x_n) < \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

以上 n 个不等式相加, 得 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) < f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

19.证明:(1)因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$,
 $(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = c + d + 2\sqrt{cd}$.

又 a, b, c, d 均为正数, 且 $a + b = c + d$,
 $ab > cd$, 所以 $\sqrt{ab} > \sqrt{cd}$,

所以 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$,
所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$.

(2)①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$,
则 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$,
即 $a + b + 2\sqrt{ab} > c + d + 2\sqrt{cd}$.

由 $a + b = c + d$, 得 $ab > cd$,
又 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$,
 $(c - d)^2 = (c + d)^2 - 4cd$,
所以 $(a - b)^2 < (c - d)^2$,

所以 $|a - b| < |c - d|$;
②若 $|a - b| < |c - d|$,
则 $(a - b)^2 < (c - d)^2$,
即 $(a + b)^2 - 4ab < (c + d)^2 - 4cd$,
由 $a + b = c + d$, 得 $ab > cd$.

则有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$,
所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$.

综上, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a - b| < |c - d|$ 的充要条件.

20.解:(1)根据所给数据, 知众数是出现次数最多的数, 为 $[6.5, 7.5)$ 的组中值 7;

中位数两边频率相等, 不妨设为 x ,
则 $0.04 + 0.12 + (x - 6.5) \times 0.4 = 0.5, x = 7.35$.

(2)根据题目中算法流程图, 用计算机统计平均睡眠时间, 总共执行 6 次循环, 则判断框①中应填入的条件是 $i \geq 6$ (或 $i = 6$ 或 $i > 5$);

(3)设第 1 组 2 个同学的睡眠时间为 A, B , 第 5 组 3 个同学的睡眠时间为 c, d, e , 则从第 1 组和第 5 组中随机取出 2 个数据, 包含的基本事件有 $AB, Ac, Ad, Ae, Bc, Bd, Be, cd, ce, de$ 共 10 个,

其中满足时间差的绝对值大于 1 小时的基本事件有 Ac, Ad, Ae, Bc, Bd, Be 共 6 个, 故所求的概率为 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

21.(1)证明:① $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$.

②假设 T 是函数 $f(x) = \tan x$ 的一个周期, 且 $0 < T < \pi$, 则对任意 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 有 $\tan(x + T) = \tan x$, 令 $x = 0$ 得 $\tan T = 0$, 而当 $0 < T < \pi$ 时, $\tan T \neq 0$ 恒成立或 $\tan T$ 无意义, 矛盾, 所以假设不成立, 原命题成立.

(2)解:由(1)可类比出函数 $f(x)$ 是周期函数, 它的最小正周期是 $4a$.

证明:因为 $f(x + 2a) = f(x + a + a) = \frac{1 + f(x + a)}{1 - f(x + a)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}$,
所以 $f(x + 4a) = f[-(x + 2a) + 2a] = -\frac{1}{f(x + 2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x)$.

所以 $f(x)$ 是以 $4a$ 为最小正周期的周期函数.

22.(1)解:当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + \ln(x + 1)$,
 $f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x + 1} = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $x > -1$, 所以当 $x \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 极小值点为 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)解:因为 $f'(x) = 2x - a + \frac{1}{x + 1}$, 由 $f'(x) > x$, 得 $2x - a + \frac{1}{x + 1} > x$, 即 $a < x + \frac{1}{x + 1}$ ($0 < x < 1$), 所以问题等价为在区间 $(0, 1)$ 上恒有 $a < x + \frac{1}{x + 1}$. 又 $x + \frac{1}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1} - 1 > 1$, 所以 $a \leq 1$. 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

第36期

第2-3版专题检测题参考答案

- 一、选择题
1-6.BDACCB 7-12.CBBDCD

二、填空题
13. $\frac{7}{8}$ 14. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 15. $2\sqrt{3}$

16. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 或 2

三、解答题

17. 解: $f(x) \leq g(x), a + \sqrt{-x^2 - 4x} \leq \frac{4}{3}x + 1 - a$.

$x + 1, \sqrt{-x^2 - 4x} \leq \frac{4}{3}x + 1 - a$.

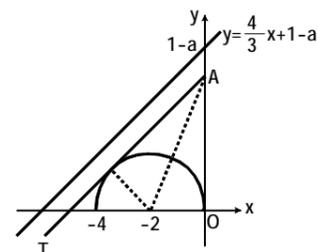
令 $y = \sqrt{-x^2 - 4x}$, ①

$y = \frac{4}{3}x + 1 - a$, ②

①式变形, 得 $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$), 即表示以 $(-2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆的上半个圆;

②表示斜率为 $\frac{4}{3}$, 纵截距为 $1 - a$ 的平行直线系. 如下图, 设上述平行直线系中与圆相切的直线为 AT , 其倾斜角为 α , 则有 $\tan \alpha = \frac{4}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 即 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $|OA| = 2 \tan\left(\frac{90^\circ + \alpha}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 6$. 要使 $f(x) \leq g(x)$ 在 $x \in [-4, 0]$ 时恒成立, 则②所表示的直线应该在直线 AT 的上方或与它重合, 故有 $1 - a \geq 6$, 所以 $a \leq -5$. 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -5]$.

②表示斜率为 $\frac{4}{3}$, 纵截距为 $1 - a$ 的平行直线系. 如下图, 设上述平行直线系中与圆相切的直线为 AT , 其倾斜角为 α , 则有 $\tan \alpha = \frac{4}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 即 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $|OA| = 2 \tan\left(\frac{90^\circ + \alpha}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 6$. 要使 $f(x) \leq g(x)$ 在 $x \in [-4, 0]$ 时恒成立, 则②所表示的直线应该在直线 AT 的上方或与它重合, 故有 $1 - a \geq 6$, 所以 $a \leq -5$. 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -5]$.



(第17题图)

18. 解:(1)由图象可以得到函数 $f(x)$ 的振幅 $A = 3$.

设函数 $f(x)$ 的周期为 T ,

则 $\frac{3}{4}T = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$,

所以 $T = 5\pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$.

由 $f(x)$ 过 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$,

得 $3\sin\left(\frac{2}{5} \times \frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$,

得 $\frac{2}{5} \times \frac{\pi}{4} + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{10} (k \in \mathbf{Z})$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{10}$,

所以 $f(x) = 3\sin\left(\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10}\right)$.

(2)令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10} \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

($k \in \mathbf{Z}$), 得 $\frac{3}{2}\pi + 5k\pi \leq x \leq 4\pi + 5k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

$\left(\frac{3}{2}\pi + 5k\pi, 4\pi + 5k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$.

函数 $f(x)$ 的最大值为 3,

当且仅当 $\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

即 $x = \frac{3}{2}\pi + 5k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数 $f(x)$

取得最大值.

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 3,

取得最大值时 x 的集合为

$\left\{x \mid x = \frac{3}{2}\pi + 5k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

19.(1)证明:四棱锥 $P-ABCD$ 中, 因为 $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $BC \parallel AD$. 因为 $AD \subset$ 平面 $PAD, BC \not\subset$ 平面 PAD , 所以直线 $BC \parallel$ 平面 PAD .

(2)解:如下图所示, 取 AD 中点 O, CD 中点 E , 连接 PO, OC, OE, PE , 则 $PO \perp AD, OE \perp CD$. 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$. 设 $AD = 2x$, 则 $AB = BC = x, CD = \sqrt{2}x, OE = \frac{\sqrt{2}}{2}x, PO = \sqrt{3}x$,

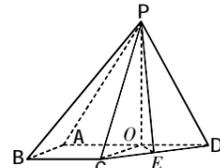
$PE = \sqrt{PO^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}x$. 因为 $\triangle PCD$ 的

面积为 $2\sqrt{7}$, 所以 $\frac{1}{2}PE \cdot CD = 2\sqrt{7}$, 所以

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}x \cdot \sqrt{2}x = 2\sqrt{7}$, 解得 $x = 2$,

所以 $PO = 2\sqrt{3}$.

则 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(BC + AD) \times AB \times PO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.



(第19题图)

20. 解:(1)当 $0 \leq x \leq 200$ 时, $y = 0.5x$;

当 $200 < x \leq 400$ 时,

$y = 0.5 \times 200 + 0.8(x - 200) = 0.8x - 60$;

当 $x > 400$ 时,

$y = 0.5 \times 200 + 0.8 \times 200 + 1.0 \times (x - 400) = x - 140$.

所以 y 与 x 之间的函数解析式为:

$y = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 200, \\ 0.8x - 60, & 200 < x \leq 400, \\ x - 140, & x > 400. \end{cases}$

(2)由(1)可知:当 $y = 260$ 时, $x = 400$,
则 $P(x \leq 400) = 0.80$.

结合频率分布直方图可知:

$0.1 + 2 \times 100B + 0.3 = 0.8, 100A + 0.05 = 0.2$,

所以 $A = 0.0015, B = 0.0020$.

(3)由题意可知 x 可取 50, 150, 250, 350, 450, 550.

当 $x = 50$ 时, $y = 0.5 \times 50 = 25$,

所以 $P(y = 25) = 0.1$;

当 $x = 150$ 时, $y = 0.5 \times 150 = 75$,

所以 $P(y = 75) = 0.2$;

当 $x = 250$ 时, $y = 0.8 \times 250 - 60 = 140$,

所以 $P(y = 140) = 0.3$;

当 $x = 350$ 时, $y = 0.8 \times 350 - 60 = 220$,

所以 $P(y = 220) = 0.2$;

当 $x = 450$ 时,

$y = 450 - 140 = 310$,

所以 $P(y = 310) = 0.15$;

当 $x = 550$ 时,

$y = 550 - 140 = 410$,

所以 $P(y = 410) = 0.05$.

故 $\bar{y} = 25 \times 0.1 + 75 \times 0.2 + 140 \times 0.3 + 220 \times 0.2 + 310 \times 0.15 + 410 \times 0.05 = 170.5$.

所以, 估计 1 月份该市居民用户平均用电费用为 170.5 元.

21.(1)证明: $f'(x) = a^x \ln a + 2x - \ln a = (a^x - 1) \ln a + 2x$.

因为 $a > 1, x < 0$,

所以 $a^x - 1 < 0, \ln a > 0, 2x < 0$.

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

(2)解:易知当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,
 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(0) = 1$ 为 $f(x)$ 的最小值.

$|f(x) - t| - 1 = 0 \Rightarrow f(x) = t + 1$, 或 $f(x) = t - 1$.
要使函数 $y = |f(x) - t| - 1$ 有四个零点,
需 $t + 1 > 1$ 且 $t - 1 > 1$, 所以 $t > 2$. 所以 t 的取值范围为 $(2, +\infty)$.

(3)解:因为 $a > 1$, 所以 $f(1) = a + 1 - \ln a > f(-1) = \frac{1}{a} + 1 + \ln a > f(0) = 1$.

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以对 $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1], |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(1) - f(0)| = a - \ln a$. 要使对 $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1], |f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ 恒成立, 只要 $a - \ln a \leq e - 1$ 成立即可.

设 $h(a) = a - \ln a (a > 1)$, 易知 $h'(a) = 1 - \frac{1}{a} > 0$. 函数 $h(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 而 $h(e) = e - 1$, 所以由 $h(a) \leq h(e)$, 得 $1 < a \leq e$. 所以 a 的取值范围为 $(1, e]$.

22. 解:(1)由题意, 可得 $c = 1$.

因为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

所以 $a = 2$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

一、选择题

1-6.BAABBA 7-12.DCDADD

二、填空题

13.1 14.平行四边形 15. $8\sqrt{2}-8$

16.①②③④

三、解答题

17.解:(1)因为 $m=(2\sin B, \sqrt{3})$, $n=(2\cos^2 \frac{B}{2}-1, \cos 2B)$, $m \perp n$, 所以 $2\sin B \cdot (2\cos^2 \frac{B}{2}-1) + \sqrt{3} \cos 2B = 0$, 即 $\sin 2B = -\sqrt{3} \cos 2B$, 所以 $\tan 2B = -\sqrt{3}$, 又 B 为锐角, 所以 $2B \in (0, \pi)$, 所以 $2B = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin 2x \cos B - \cos 2x \sin B = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

解得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$, 又由 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbb{Z})$.

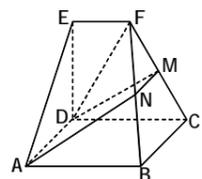
(2)由(1)知 $B = \frac{\pi}{3}$, 又 $b=4$, 由余弦定理, 得 $16 = a^2 + c^2 - ac$, 因为 $a^2 + c^2 \geq 2ac$, 所以 $ac \leq 16$ (当且仅当 $a=c=4$ 时, 等号成立), 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B \leq 4\sqrt{3}$ (当且仅当 $a=c=4$ 时, 等号成立), 所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $4\sqrt{3}$.

18.(1)证明: 因为底面 $ABCD$ 为矩形, 所以 $CD \perp AD$. 又因为 $CD \perp EA$, $AD \cap EA = A$, 所以 $CD \perp$ 平面 EAD , 所以 $CD \perp ED$.

(2)证明: 因为底面 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AD \parallel BC$. 因为 $AD \not\subset$ 平面 FBC , $BC \subset$ 平面 FBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 FBC . 又因为平面 $ADMN \cap$ 平面 $FBC = MN$, 所以 $AD \parallel MN$.

(3)解: 平面 $ADMN$ 与平面 BCF 可以垂直. 证明如下: 连接 DF .

因为 $AD \perp ED$, $AD \perp CD$, $ED \cap CD = D$, 所以 $AD \perp$ 平面 $CDEF$, 所以 $AD \perp DM$. 因为 $AD \parallel MN$, 所以 $DM \perp MN$. 因为平面 $ADMN \cap$ 平面 $FBC = MN$, 若使平面 $ADMN \perp$ 平面 BCF , 则需 $DM \perp$ 平面 BCF , 即 $DM \perp FC$. 在梯形 $CDEF$ 中, 因为 $EF \parallel CD$, $DE \perp CD$, $CD = 2EF = 2$, $ED = \sqrt{3}$, 所以 $DF = DC = 2$. 所以若使 $DM \perp FC$ 能成立, 则 M 为 FC 的中点, 所以 $\frac{FM}{FC} = \frac{1}{2}$.



(第 18 题图)

19.解:(1)由已知 $S_n = 2a_n - a_1$, 有 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$, 即 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2)$. 从而 $a_2 = 2a_1, a_3 = 2a_2 = 4a_1$. 又因为 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列, 所以 $a_1 + a_3 = 2(a_2 + 1)$. 所以 $a_1 + 4a_1 = 2(2a_1 + 1)$. 解得 $a_1 = 2$. 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列. 故 $a_n = 2^n (n \in \mathbb{N}_+)$.

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$, 所以 $T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2 - \frac{1}{2^n}}{2 - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$. 由

$|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$, 得 $|1 - \frac{1}{2^n} - 1| < \frac{1}{1000}$, 即 $2^n > 1000$. 因为 $2^9 = 512 < 1000 < 1024 = 2^{10}$, 所以 $n \geq 10$. 于是, 使 $|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值为 10.

20.解:(1)由已知, 得 $f(x) = \cos x \cdot (\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$. 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2)因为 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. 所以 $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-1, \frac{1}{2}]$, 所以 $f(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$. 所以 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$, 最小值为 $-\frac{1}{2}$.

21.(1)解: $f'(x) = \frac{1}{x} - 2a$, 因为 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线平行于直线 $x+y-2=0$, 所以 $f'(1) = 1 - 2a = -1$, 即 $a=1$. 所以 $f(x) = \ln x - 2x$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$. 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{1}{2}) = -1 - \ln 2$.

(2)证明: $g(x) = \ln x - 2ax + \frac{1}{2}x^2$, $g'(x) = x + \frac{1}{x} - 2a = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$. 令 $g'(x) = 0$, 得 $x^2 - 2ax + 1 = 0$. ①当 $\Delta = 4a^2 - 4 \leq 0$, 即 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $x^2 -$

$2ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 即 $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 无极大值点, 不符合题意; ②当 $\Delta = 4a^2 - 4 > 0$, 即 $a > 1$, 或 $a < -1$ 时, 方程 $g'(x) = 0$ 有两解 x_1, x_2 , 又因为 x_0 是 $g(x)$ 的极大值点, 所以 $0 < x_0 < x_1$, 又 $x_1 x_2 = 1, x_1 + x_2 = 2a > 0$, 所以 $a > 1, 0 < x_0 < 1$. 又 $g'(x_0) = x_0 + \frac{1}{x_0} - 2a = 0$, 所以 $a = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0}$. 所以

$x_0 f'(x_0) + 1 + ax_0^2 = x_0 \ln x_0 - \frac{x_0^3 + x_0}{2} + 1$. 设 $h(x) = x \ln x - \frac{x^3 + x}{2} + 1 (x \in (0, 1))$, 则 $h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln x$, $h''(x) = -3x + \frac{1}{x} = \frac{1-3x^2}{x}$, 所以当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $h''(x) > 0$; 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ 时, $h''(x) < 0$. 所以 $h'(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 上单调递减,

所以 $h'(x) \leq h'(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \ln \frac{\sqrt{3}}{3} < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $h(x_0) > h(1) = 0$, 即 $x_0 \ln x_0 - \frac{x_0^3 + x_0}{2} + 1 > 0$, 所以 $x_0 f'(x_0) + 1 + ax_0^2 > 0$.

22.(1)证明: 因为直线 $OP: y = k_1 x$ 以及 $OQ: y = k_2 x$ 与圆 M 相切, 所以 $\frac{|k_1 x_0 - y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \sqrt{2}$, 化简, 得 $(x_0^2 - 2)k_1^2 - 2x_0 y_0 k_1 + y_0^2 - 2 = 0$, 同理 $(x_0^2 - 2)k_2^2 - 2x_0 y_0 k_2 + y_0^2 - 2 = 0$. 所以 k_1, k_2 是方程 $(x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0 y_0 k + y_0^2 - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根, 所以 $k_1 k_2 = \frac{y_0^2 - 2}{x_0^2 - 2}$.

因为点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 即 $y_0^2 = 3 - \frac{1}{2}x_0^2$, 所以 $k_1 k_2 = \frac{1 - \frac{1}{2}x_0^2}{x_0^2 - 2} = -\frac{1}{2}$. 故 $k_1 k_2$ 为定值.

(2)解: $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是定值, 定值为 9. 理由如下: 当直线 OP, OQ 不与坐标轴重合时,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = k_1 x, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1^2 = \frac{6}{1+2k_1^2}, \\ y_1^2 = \frac{6k_1^2}{1+2k_1^2}. \end{cases}$ 所以 $x_1^2 + y_1^2 = \frac{6(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}$. 同理, $x_2^2 + y_2^2 = \frac{6(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}$. 由 $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$, 所以 $|OP|^2 + |OQ|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \frac{6(1+k_1^2)}{1+2k_1^2} + \frac{6(1+k_2^2)}{1+2k_2^2} = \frac{6(1+k_1^2)}{1+2k_1^2} + \frac{6[1+(-\frac{1}{2k_1})^2]}{1+2(-\frac{1}{2k_1})^2} = \frac{9+18k_1^2}{1+2k_1^2} = 9$.

当直线 OP, OQ 与坐标轴重合时, 显然有 $|OP|^2 + |OQ|^2 = 9$. 综上, $|OP|^2 + |OQ|^2 = 9$.

第 35 期

第 2-3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1-6.DCDACA 7-12.ACDAAB

二、填空题

13. $\sin 80^\circ$ 14. $64\pi \text{cm}^2$ 15. $\frac{2}{5}$

16.①②④

三、解答题

17.解:(1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1 = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$, 因为 $-1 \leq \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 -2 , 又 $\omega = 2$, 所以最小正周期是 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2)由 $f(C) = \sin(2C - \frac{\pi}{6}) - 1 = 0$, 得 $\sin(2C - \frac{\pi}{6}) = 1$, 因为 $0 < C < \pi$, 所以 $-\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}$, 所以 $2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $C = \frac{\pi}{3}$. 因为 $\sin B = 2\sin A$, 所以由正弦定理, 得 $b = 2a$.

又 $c = \sqrt{3}$, 所以由余弦定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3}$, 即 $a^2 + b^2 - ab = 3$, 联立①②, 解得 $a=1, b=2$.

18.(1)证明: 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $BC \parallel AD$.

因为 $BC \not\subset$ 平面 ADE , $AD \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \parallel$ 平面 ADE .

因为 $BF \not\subset$ 平面 ADE , $DE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BF \parallel$ 平面 ADE .

又 $BC, BF \subset$ 平面 BCF , 且 $BC \cap BF = B$, 所以平面 $BCF \parallel$ 平面 AED .

(2)解: 连接 AC , 交 BD 于点 O . 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AO \perp BD$.

又因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AO \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AO \perp ED$. 因为 $BD \cap ED = D$, 所以 $AO \perp$ 平面 $BDEF$.

所以 AO 是四棱锥 $A-BDEF$ 的高.

因为 $AB=AD, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$,

所以 $BF=BD=AB=a$,

所以 $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

所以四棱锥 $A-BDEF$ 的体积

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3.$$

19.证明:(1)由 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, 得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$, 因为 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 所以 $a_2 - a_1 = 2$, 所以 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列.

所以 $a_{n+1} - a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 则 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.

(2) $b_n = \log_2(a_n + 1) = \log_2 2^n = n, S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$,

所以 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} = 2[1 - \frac{1}{2}] + 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}] + \dots + 2[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = 2(1 - \frac{1}{n+1}) < 2$.

20.解:(1)设曲线 AF 所在抛物线的方程为 $y = ax^2 (a > 0)$, 因为抛物线过点 $F(2, 4)$, 所以 $4 = a \times 2^2$, 得 $a = 1$, 所以曲线 AF 所在抛物线的方程为 $y = x^2$.

(2)按(1)的直角坐标系, 则 $E(0, 4), C(2, 6)$, 所以 EC 所在直线的方程为 $y = x + 4$. 设 $P(x, x^2) (0 < x < 2)$, 则 $PO = x, OE = 4 - x^2, PR = 4 + x - x^2$, 所以公园的面积 $S = \frac{1}{2}(4 - x^2 + 4 + x - x^2) \cdot x = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x (0 < x < 2)$,

所以 $S' = -3x^2 + x + 4$.

令 $S' = 0$, 得 $x = \frac{4}{3}$, 或 $x = -1$ (舍去), 当 x 变化时, S' 和 S 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}, 2)$
S'	+	0	-
S	↗	极大值 $\frac{104}{27}$	↘

当 $x = \frac{4}{3}$ 时, S 取得最大值 $\frac{104}{27}$.

故公园的最大面积为 $\frac{104}{27} \text{km}^2$.

21.解:(1)因为直线 $y = bx + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 所以 $\frac{2}{\sqrt{b^2 + 1}} = \sqrt{2}$, 解得

$b = 1$. 因为椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以

$\frac{a^2 - 1}{a^2} = (\frac{\sqrt{6}}{3})^2$, 解得 $a^2 = 3$, 所以所求椭圆

的方程是 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2)直线 $y = kx + 2$ 代入椭圆方程, 消去 y , 可得 $(1 + 3k^2)x^2 + 12kx + 9 = 0$, 所以 $\Delta = 36k^2 - 36 > 0$, 所以 $k > 1$, 或 $k < -1$.

设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = -\frac{12k}{1 + 3k^2}, x_1 x_2 = \frac{9}{1 + 3k^2}$. 若以 CD 为直径的圆过点 E , 则 $EC \perp ED$,

因为 $\vec{EC} = (x_1 - 1, y_1), \vec{ED} = (x_2 - 1, y_2)$, 所以 $\vec{EC} \cdot \vec{ED} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0$, 所以 $(1 + k^2)x_1 x_2 + (2k - 1)(x_1 + x_2) + 5 = 0$,

所以 $(1 + k^2) \times \frac{9}{1 + 3k^2} + (2k - 1) \times (-\frac{12k}{1 + 3k^2}) + 5 = 0$, 解得 $k = -\frac{7}{6} < -1$,

所以存在实数 $k = -\frac{7}{6}$, 使得以 CD 为直径的圆过定点 E .

22.(1)解: $f'(x) = e^{-x}(1-x)$. 由 $f'(x) > 0$, 得 $x < 1$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$. 所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$, 单调递减区间是 $(1, +\infty)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1) = \frac{1}{e}$, 无极小值.

(2)证明: 因为函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $g(x) = f(2-x) = (2-x)e^{x-2}$.

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x) = xe^{-x} + (x-2)e^{x-2}$, 所以 $F'(x) = (x-1)(e^{2x-2} - 1) \cdot e^{-x}$. 因为 $x > 1$, 所以 $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增, 所以 $F(x) > F(1) = 0$, 所以 $f(x) > g(x)$.