所以 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

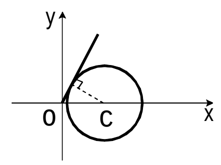
6.A

提示：$z=(a-2i)(1+i)=(a+2)+(a-2)i$，则点 M 的坐标为 $(a+2,a-2)$，当 $a=1$ 时，坐标为 $(3,-1)$，即点 M 在第四象限，若点 M 在第四象限，而 $a=1$ 却不一定成立，故“$a=1$”是“点 M 在第四象限”的充分而不必要条件.

7.C

8.D

提示：因为 $|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$，所以 $(x-2)^2+y^2=3$，所以点 (x,y) 在以 $C(2,0)$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上，如图，由平面几何知识知 $-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



9.C

提示：$\frac{a}{b}=\frac{3+2i}{4+xi}=\frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2}=\frac{12+2x}{16+x^2}+\frac{8-3x}{16+x^2}\cdot i\in\mathbf{R}$，所以 $\frac{8-3x}{16+x^2}=0$，所以 $x=\frac{8}{3}$.

10.C

提示：因为 $t^2+2t+2=(t+1)^2+1>0$，所以 z 对应的点在实轴的上方.

又因为 z 与 $\bar{z}$ 对应的点关于实轴对称.所以C项正确.

11.A

提示：设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}\cdot i=(x-yi)\cdot i=y+xi=-1+2i$，所以 $y=-1$，$x=2$，故 $z=2-i$.故选A.

12.D

提示：由条件知 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，若 $z\in\mathbf{R}$，则 $a^2-a-2=0$，所以 $a=-1$ 或 2，所以 $p_1=\frac{2}{5}$；

若 $z=0$，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$ 所以 $a=-1$，所以 $p_3=\frac{1}{5}$；

若 z 为虚数，则 $a^2-a-2\neq0$，所以 $a\neq-1$ 且 $a\neq2$，

所以 $p_2=\frac{3}{5}$；

若 z 为纯虚数，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq0,\end{cases}$ 所以 $a=1$，所以 $p_4=\frac{1}{5}$.

所以 $p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.5

提示：复数 $3-5i$，$1-i$ 和 $-2+ai$ 在复平面内对应的点分别为 $(3,-5)$，$(1,-1)$，$(-2,a)$，所以由三点共线的条件可得 $\frac{-1-(-5)}{1-3}=\frac{a-(-1)}{-2-1}$，解得 $a=5$.

14.$\frac{9}{2}$

提示：把 $x=1+2i$ 代入 $x^2-mx+2n=0$ 中，得 $(1+2i)^2-m(1+2i)+2n=0$，即 $1-4+4i-m-2mi+2n=0$，所以 $(2n-m-3)+(4-2m)i=0$，

根据复数相等的充要条件，

得 $\begin{cases}-3-m+2n=0,\\4-2m=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n=\frac{5}{2},\\m=2,\end{cases}$ 所以 $m+n=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$.

15.0

提示：设 $z=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$，

则 $\bar{z}=m-ni$.

所以 $b=z\cdot\bar{z}=m^2+n^2$，

$a=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}=\frac{4mni}{2i}=2mn$.

故 $a-b=2mn-(m^2+n^2)=-(m-n)^2\leqslant0$，

即 $a-b$ 的最大值是0.

16.①②

提示：当 z 为纯虚数时，z 与 $\bar{z}$ 对应的点均在虚轴上，故 P_1,O,P_2 三点共线，①正确；显然③错误；当 $z=0$ 时，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 对应的复数均为0，此时有 $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$，故②正确，④错误.

三、解答题

17.**解**：(1) $\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=\frac{-3+i}{-i}=-1-3i$.

(2) $\frac{(1+2i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{-3+4i+3-3i}{2+i}=\frac{i}{2+i}=\frac{i(2-i)}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

18.**解**：设原方程的一个实根为 $t=t_0$，则有 $(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0,①\\t_0+x-y=0,②\end{cases}$

把②代入①中消去 t_0，得 $(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)因为 $z\in\mathbf{R}$，所以 $m^2+2m-3=0$ 且 $m-1\neq0$，解得 $m=-3$.

(2)因为 z 是纯虚数，

所以 $\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}=0,\\m^2+2m-3\neq0,\end{cases}$

解得 $m=0$，或 $m=-2$.

(3)因为 z 对应的点位于复平面第二象限，所以 $\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}<0,\\m^2+2m-3>0,\end{cases}$

解得 $m<-3$.

所以 $m\in(-\infty,-3)$.

(4)因为 z 对应的点在直线 $x+y+3=0$ 上，所以 $\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)+3=0$，

解得 $m=0$，或 $m=-2$.

20.**解**：因为 $4(a+bi)+2(a-bi)=3\sqrt{3}+i$，

所以 $6a+2bi=3\sqrt{3}+i$，

所以 $\begin{cases}6a=3\sqrt{3},\\2b=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

所以 $z-\omega=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-(\sin\theta-i\cos\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)+\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)i$.

所以 $|z-\omega|$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2}$

$=\sqrt{2-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sqrt{2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}$

$=\sqrt{2-2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$，

因为 $-1\leqslant\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，所以 $0\leqslant2-2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant4$，

所以 $0\leqslant|z-\omega|\leqslant2$，故所求得 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$|z-\omega|$ 的取值范围是 $[0,2]$.

21.**解**：因为 $z=\frac{(-1+3i)(1-i)-(1+3i)}{i}=\frac{1+i}{i}=1-i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$.又 $\left|\frac{\omega}{z}\right|=\frac{|\omega|}{|z|}\leqslant\sqrt{2}$，所以 $|\omega|\leqslant2$.

而 $\omega=z+ai=(1-i)+ai=1+(a-1)i$，$a\in\mathbf{R}$，

则 $\sqrt{1^2+(a-1)^2}\leqslant2\Rightarrow(a-1)^2\leqslant3$，

所以 $-\sqrt{3}\leqslant a-1\leqslant\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{3}$. 即 a 的取值范围为 $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

22.(1)**解**：设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$，则 $z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为 z_2 是实数，$b\neq0$，于是有 $a^2+b^2=1$，即 $|z_1|=1$，还可得 $z_2=2a$.

由 $-1\leqslant z_2\leqslant1$，得 $-1\leqslant2a\leqslant1$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即 z_1 的实部的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$.

因为 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，$b\neq0$，所以 ω 为纯虚数.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

提示：从证明过程来看，是从已知条件入手，经过推导得出结论，符合综合法的证明思路.

2.C

3.D

提示：A，与两相互垂直的直线平行的平面的位置关系不能确定；B，平面内的一条直线与另一个平面的交线垂直，这两个平面的位置关系不能确定；C，这两个平面有可能平行或重合；D是成立的，故选D.

4.C

5.B

提示：$q=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{nbc}{m}+cd}$

$\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

$=p$.

6.C

提示：选项A中命题条件较少，不足以正面证明；选项B中命题是否定性命题，可以用反证法证明；选项D中命题是至少性命题，可以用反证法证明. 选项C不适合用反证法证明.故选C.

7.C

提示：首先若 P、Q、R 同时大于零，则必有 $PQR>0$ 成立.其次，若 $PQR>0$，且 P、Q、R 不都大于0，则必有两个为负，不妨设 $P<0$，$Q<0$，即 $a+b-c<0$，$b+c-a<0$，两式相加得 $b<0$ 与 $b\in\mathbf{R}^+$ 矛盾，故 P、Q、R 都大于0.故选C.

8.A

提示：$f(x)=x^3+x$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

由 $a+b>0$ 得 $a>-b$，

所以 $f(a)>f(-b)$，即 $f(a)+f(b)>0$，

同理 $f(a)+f(c)>0$，$f(b)+f(c)>0$，

所以 $f(a)+f(b)+f(c)>0$.

9.C

提示：假设 $c\parallel b$，而由 $c\parallel a$，可得 $a\parallel b$，这与 a,b 异面矛盾，故 c 与 b 不可能是平行直线.故选C.

10.B

提示：分 $\triangle ABC$ 的直线只能过一个顶点且与对边相交，如直线 AD(点 D 在 BC 上)，则 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，若 $\angle ADB$ 为钝角，则 $\angle ADC$ 为锐角.而 $\angle ADC>\angle BAD$，$\angle ADC>\angle ABD$，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 不可能相似，与已知不符，只有当 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$ 时，才符合题意.

11.C

提示：由于 a,b,c 不全相等，则 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 中至少有一个不为0，故①正确；②显然成立；令 $a=2$，$b=3$，$c=5$，满足 $a\neq c$，$b\neq c$，$a\neq b$，故③错.

12.B

提示：因为 $x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，所以 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geqslant2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$，等号在 $y=4x$，即 $x=2$，$y=8$ 时成立，所以 $x+\frac{y}{4}$ 的最小值为4，要使不等式 $m^2-3m>x+\frac{y}{4}$ 有解，应有 $m^2-3m>4$，所以 $m<-1$ 或 $m>4$，故选B.

二、填空题

13.$a\neq1$ 或 $b\neq1$

14.④

提示：因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形ABCD为平行四边形.

15.$AC\perp BD$

提示：从结论出发，找一个使 $A_1C\perp B_1D_1$ 成立的充分条件. 因而可以是：$AC\perp BD$ 或四边形ABCD为正方形.

16.(10,5)

提示：设(△,□)为 (a,b)，则 $30-a=4b$，即 $a+4b=30$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{a+4b}{30}=\frac{5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}}{30}\geqslant\frac{5+4}{30}=\frac{3}{10}$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=2b$ 时等号成立，此时 $a=10$，$b=5$.

三、解答题

17**解**：上述解法中，对 $ab\leqslant\frac{1}{4}$ 的证明是错误的.因为 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 成立的条件是 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，而原题条件是 $a\geqslant-\frac{1}{2}$，$b\geqslant-\frac{1}{2}$，不满足上述条件.

正确解答为：在错解中，得 $\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant2$.

因为 $a\geqslant-\frac{1}{2}$，$b\geqslant-\frac{1}{2}$，所以 $2a+1\geqslant0$，$2b+1\geqslant0$.

所以 $\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant\frac{(2a+1)+(2b+1)}{2}=\frac{2(a+b+1)}{2}=2$，即 $\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant2$ 成立，

因此原不等式成立.

18.**证明**：假设 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 成立，则 $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$，所以 $b^2=ac$.

又因为 $b=\frac{a+c}{2}$，所以 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$，即 $a^2+c^2=2ac$，即 $(a-c)^2=0$，

所以 $a=c$，这与 a,b,c 两两不相等矛盾，

所以 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 不成立.

19.**证明**：因为 $a^3-b^3=a^2-b^2$ 且 $a\neq b$，所以 $a^2+ab+b^2=a+b$，

由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2$，得 $(a+b)^2>a+b$，

又 $a+b>0$，所以 $a+b>1$.

要证 $a+b<\frac{4}{3}$，即证 $3(a+b)<4$，

又因为 $a+b>0$，

所以只需证明 $3(a+b)^2<4(a+b)$，

又 $a+b=a^2+ab+b^2$，

即证 $3(a+b)^2<4(a^2+ab+b^2)$，也就是证明 $(a-b)^2>0$.

因为 a,b 是不相等的两个正数，故 $(a-b)^2>0$ 成立.

故 $a+b<\frac{4}{3}$ 成立.

综上，得 $1<a+b<\frac{4}{3}$.

20.**证明**：要证原式，只需证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，

即证 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$，

即只需证 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=1$.

而由题意知 $A+C=2B$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$，

所以 $b^2=a^2+c^2-ac$.

所以 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc}=1$.

所以原等式成立，即 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

21.**解**：假设三个方程均无实根，则

$\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\\Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\\Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\a<-1\text{或}a>\frac{1}{3},\\-2<a<0,\end{cases}$ 即 $-\frac{3}{2}<a<-1$.

所以当 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 时，三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.**解**：(1)证明：当 $a+b\geqslant0$ 时，$a\geqslant-b$ 且 $b\geqslant-a$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，
所以 $f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$，
所以 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)(1)中命题的逆命题为“如果 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，那么 $a+b\geqslant 0$”，此命题成立.

用反证法证明如下：
假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，
所以 $f(a)<f(-b)$.
同理可得 $f(b)<f(-a)$.
所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，这与 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$ 矛盾，
故假设不成立，
所以 $a+b\geqslant 0$ 成立，即(1)中命题的逆命题成立.

第 6 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B

提示：设 $n\in\mathbf{N}_+$，则数字 n 共有 n 个，所以 $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 100$，即 $n(n+1)\leqslant 200$，又因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $n=13$，到第 13 个 13 时共有 $\frac{13\times 14}{2}=91$ 项，从第 92 项开始为 14，故第 100 项为 14.

2.D

3.C

提示：因为 $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$，$\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$，所以原不等式只需证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$，所以只需证 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$，故选 C.

4.B

5.D

6.C

提示：令 $a=-2$，$b=-1$，满足 $a<b<0$，则 $a^2>b^2$，$\frac{a}{b}=2>1$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A、B、D 都不成立，排除 A、B、D，选 C.

7.C

提示：正三角形的边对应正四面体的面，即正三角形表示的侧面，所以边的中点对应的就是正三角形的中心.

8.C

提示：垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.A

提示：满足题目中的条件，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，在 A、B、C、D 四选项中，由基本函数性质知，A 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，故选 A.

10.C

提示：因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$，

依此类推可得：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$，所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$，$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$，$m=13$，$n=20$，即 $1\leqslant x\leqslant 13$，$1\leqslant y\leqslant 20$. 又 $\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$，把 $\frac{y+1}{x+1}$ 看成点 (x,y)，$(-1,-1)$ 连线的斜率，结合 $m\leqslant n$，$m,n\in\mathbf{N}_+$，在满足条件的点中，$(13,1)$，$(-1,-1)$ 连线的斜率最小，为 $\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$，故 $\frac{x+y+2}{x+1}$ 最小值为 $\frac{8}{7}$. 故选 C.

11.A

提示：对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 总有 $c_n/\!/b_n$，则存在实数 $\lambda\neq 0$，使 $c_n=\lambda b_n$，所以 $a_n=\lambda n$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

12.B

提示：由数据可知，进入立定跳远决赛的 8 人为 1~8 号，所以进入 30 秒跳绳决赛的 6 人从 1~8 号里产生. 数据排序后可知 3 号，6 号，7 号必定进入 30 秒跳绳决赛，则得分为 63，a，60，63，$a-1$ 的 5 人中有 3 人进入 30 秒跳绳决赛. 若 1 号，5 号学生未进入 30 秒跳绳决赛，则 4 号学生就会进入决赛，与事实矛盾，所以 1 号，5 号学生必进入 30 秒跳绳决赛. 故选 B.

二、填空题

13.$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2ab+2bc+2ac$，$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant 0$

14.$\frac{8}{65}$

提示：观察猜想可得：$a_n=\frac{n}{n^2+1}$，所以当输入数据 8 时，输出数据为 $\frac{8}{8^2+1}=\frac{8}{65}$.

15.$\frac{a^3}{8}$

16.③

提示：对于①②④可举反例，说明条件不能推出结论，如①中：$a=b=\frac{1}{2}$，②中：$a=b=1$，④中：$a=-1$，$b=-2$. 对于③，反设 a，b 都小于等于 1，则 $a+b\leqslant 2$ 与已知矛盾.
所以假设不成立，故③正确.

三、解答题

17.**证明**：假设 $\frac{1}{4}$ 在 $f(x)$ 的定义域内，
因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，
所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.
又 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，$2\notin[-1,1]$，
所以 $\frac{1}{4}$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内.

18.**解**：(1)如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的和等于同一个常数，那么这个数列就叫做等和数列.

(2)由(1)知 $a_n+a_{n+1}=a_{n+1}+a_{n+2}$，所以 $a_{n+2}=a_n$.
所以等和数列的奇数项相等，偶数项也相等.

19.**解**：$f(a)+f(c)>2f(b)$.
证明如下：因为 a,b,c 是互不相等的正数，
所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.
因为 $b^2=ac$，所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.
即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.
从而 $(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.
因为 $f(x)=\log_2 x$ 是增函数，
所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.
即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.
故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

20.**证明**：作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF，分别交 AA_1，BB_1，CC_1 于点 D，F，E，则 $\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成角. 在 $\triangle DEF$ 中有余弦定理：$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$，两边同乘以 AA_1^2，得 $DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\angle DFE$.

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\angle DFE$.

21.**证明**：要证明 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$，只需证明 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}>0$ 即可.

因为 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}=\frac{a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)}{(a+m)(b+m)(c+m)}$，
因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$m>0$，
所以 $(a+m)(b+m)(c+m)>0$，
因为 $a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)=abc+abm+acm+am^2+abc+abm+bcm+bm^2-abc-bcm-acm-cm^2=2abm+am^2+abc+bm^2-cm^2=2abm+abc+(a+b-c)m^2$，
因为 $\triangle ABC$ 中任意两边之和大于第三边，
所以 $a+b-c>0$，所以 $(a+b-c)m^2>0$，
所以 $2abm+abc+(a+b-c)m^2>0$，
所以 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

22.**解**：$\triangle ABC$ 是锐角三角形.
因为 $c^n=a^n+b^n(n>2)$，所以 $c>a$，$c>b$，由 c 是 $\triangle ABC$ 的最大边，所以要证 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，只需证角 C 为锐角，即证 $\cos C>0$.
因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，
所以要证 $\cos C>0$，
只要证 $a^2+b^2>c^2$， ①
注意到条件：$a^n+b^n=c^n$，
于是将①等价变形为：
$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$. ②
因为 $c>a$，$c>b$，$n>2$，

所以 $c^{n-2}>a^{n-2}$，$c^{n-2}>b^{n-2}$，
即 $c^{n-2}-a^{n-2}>0$，$c^{n-2}-b^{n-2}>0$，
从而 $(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$，
这说明②式成立，从而①式也成立.
故 $\cos C>0$，C 是锐角，所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

第 7 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

2.D

3.A

提示：$z=(1-2i)+(3+i)=4-i$，所以 $\bar{z}=4+i$. 故选 A.

4.C

提示：$|z|=\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=1$，故选 C.

5.B

6.A

提示：$|AB|=|2i-1|=\sqrt{5}$，$|AC|=|4+2i|=\sqrt{20}$，$|BC|=5$，所以 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$. 故选 A.

7.B

8.B

9.B

10.C

提示：设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.
由已知，得 $x^2+y^2+i(2yi)\leqslant 0$，
即 $x^2+y^2-2y\leqslant 0$，即 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$.
故选 C.

11.C

提示：$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^3=-1$，$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^6=1$，所以原式 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\bar{z}$.

12.A

提示：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，所以 $|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$，
$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，所以 $\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，整理得：$a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$，所以 z 对应的点的轨迹是圆.
故选 A.

二、填空题

13.$a\neq 0$ 且 $b=0$

提示：$i(a+bi)=-b+ai$.
由 $-b+ai$ 为纯虚数，
得 $a\neq 0$ 且 $b=0$.

14.5，2

15.1

提示：复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为 $(1,1)$，B 的坐标为 $(-1,1)$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$.

16.-1

提示：因为 $x+\frac{1}{x}=-1$，所以 $x^2+x+1=0$.
所以 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以 $x^3=1$.
因为 $2017=3\times 672+1$，所以 $x^{2017}=x$，
所以 $x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解**：(1) $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$
$=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$
$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$
$=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$
$=\frac{2\sqrt{2}\cdot 2i\cdot 2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$
$=\frac{-8\sqrt{2}\times 41i}{41\times 2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**：(1)要使复数 z 对应点在 x 轴下方，则 $m^2-2m-15<0$，解得 $-3<m<5$.

(2)要使复数 z 对应点在第四象限，则 $\begin{cases}m^2+5m+6>0,\\ m^2-2m-15<0,\end{cases}$ 解得 $-2<m<5$.

(3)要使复数 z 对应点在直线 $x+y+4=0$ 上，则 $(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)+4=0$，解得 $m=1$，或 $m=-\frac{5}{2}$.

19.**解**：(1)因为 $z=\cos A+i\sin A$，所以 $z+1=1+\cos A+i\sin A$.
所以 $|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2 A}=\sqrt{2+2\cos A}$.
因为 $|z+1|=1$. 所以 $2+2\cos A=1$. 所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$. 又 $0<A<180°$，所以 $A=120°$.
所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理，得 $a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$（其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），
所以原式 $=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.
因为 $B=180°-A-C=60°-C$，
所以原式 $=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin 120°\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$，
即 $\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}$ 的值为 2.

20.**解**：因为 $(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2^4}=-8$，所以 $\left(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$，
所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\bar{\omega}$ $\left(\text{其中 }\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.
若 $x+\sqrt{3}i=-2$，则 $x\notin\mathbf{R}$.
若 $x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$，则 $x\notin\mathbf{R}$.
若 $x+\sqrt{3}i=-2\bar{\omega}=1+\sqrt{3}i$，则 $x=1$.
综上可知，存在满足题意的实数 x 且 $x=1$.

21.**解**：依题意得 z_1+z_2 为实数，因为 $z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$，
所以 $\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\ a+5\neq 0,\\ 1-a\neq 0.\end{cases}$ 所以 $a=3$. 此时 $z_1=\frac{3}{8}-i$，$z_2=-1+i$，
即 $\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.
所以 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times 1=-\frac{11}{8}$.

22.**解**：由题意，得 $z_1=\frac{-1+5i}{1+i}=2+3i$，
于是 $|z_1-\bar{z_2}|=|4-a+2i|$
$=\sqrt{(4-a)^2+4}$，$|z_1|=\sqrt{13}$.
由 $\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$，
得 $a^2-8a+7<0$，解得 $1<a<7$.
所以实数 a 的取值范围是 $(1,7)$.

第 8 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A

2.C

3.D

提示：$\left(i-\frac{1}{i}\right)^6=(i-i^3)^6=(2i)^6=-64$.

4.B

提示：由已知，得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\ m^2+m=-(1-3m),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\pm 1,\\ m=1,\end{cases}$ 所以 $m=1$.

5.A

提示：由 $\frac{1-i}{1+i}=-i$，得 $\overrightarrow{OA}=(0,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.
所以 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.