(3)当 $a=-1$ 时，$f(x)=a$ 的两根为 $0,\frac{\pi}{2}$，则 $M_a=\frac{\pi}{2}$；当 $a\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$f(x)=a$ 的四根满足 $x_1<x_2<\frac{\pi}{4}<x_3<x_4$，由对称性，得 $x_1+x_2=0$，$x_3+x_4=\pi$，则 $M_a=\pi$；

当 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)=a$ 的三根满足 $x_1<x_2=\frac{\pi}{4}<x_3$，由对称性，得 $x_1+x_3=\frac{\pi}{2}$，则 $M_a=\frac{3\pi}{4}$；当 $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 时，$f(x)=a$ 两根满足 $x_1<\frac{\pi}{4}<x_2$，由对称性，得 $M_a=\frac{\pi}{2}$.

综上，当 $a\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$M_a=\pi$；当 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$M_a=\frac{3\pi}{4}$；当 $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\cup\{-1\}$ 时，$M_a=\frac{\pi}{2}$.

## 第 28 期

## 第 2~3 版专题检测题参考答案

**一、选择题**

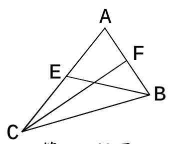
1~6.ABBABB　7~12.BABBBB

**二、填空题**

13.$\sqrt{3}$　14.$2-\sqrt{3}$　15.5

16.$\left(\frac{1}{4},\frac{7}{8}\right)$

**提示**：因为 $3\sin C=2\sin B$，所以 $3AB=2AC$，所以 $AC=\frac{3}{2}AB$.又因为点 $E,F$ 分别是 $AC,AB$ 的中点，所以 $AE=\frac{1}{2}AC$，$AF=\frac{1}{2}AB$.在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理，得 $BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos A=AB^2+\left(\frac{3}{4}AB\right)^2-2AB\times\frac{3}{4}AB\times\cos A=\frac{25}{16}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A$.在 $\triangle ACF$ 中，由余弦定理，得 $CF^2=AF^2+AC^2-2AF\cdot AC\cos A=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{3}{2}AB\right)^2-2\times\frac{1}{2}AB\times\frac{3}{2}AB\times\cos A=\frac{5}{2}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A$. 所以 $\frac{BE}{CF}=\sqrt{\frac{\frac{25}{16}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A}{\frac{5}{2}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A}}=\sqrt{1-\frac{15}{40-24\cos A}}$.因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\cos A\in(-1,1)$，所以 $\frac{15}{40-24\cos A}\in\left(\frac{15}{64},\frac{15}{16}\right)$，所以 $\frac{BE}{CF}=\sqrt{1-\frac{15}{40-24\cos A}}\in\left(\frac{1}{4},\frac{7}{8}\right)$.



(第 16 题图)

**三、解答题**

17.**解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos B=\frac{1}{3}$，所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.因为 $\angle ADC=\frac{3}{4}\pi$，所以 $\angle ADB=\frac{\pi}{4}$.在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以 $\frac{AD}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，所以 $AD=\frac{8}{3}$.

(2)设 $DC=a$，则 $BD=2a$.因为 $BD=2DC$，$\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{4}{3}\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ACD}$，则 $4\sqrt{2}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $a=2$.所以 $AC=\sqrt{4+36-2\times2\times6\times\frac{1}{3}}=4\sqrt{2}$.在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{4}{\sin\angle BAD}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，所以 $\sin\angle BAD=2\sin\angle ADB$.在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{2}{\sin\angle CAD}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin\angle ADC}$，所以 $\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\angle ADC$.因为 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，所以 $\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=4\sqrt{2}$.

18.**解**：(1)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin\frac{A}{2}-\left(2\cos^2\frac{B+C}{2}-1\right)=2\sin\frac{A}{2}-\cos(B+C)$.因为 $A+B+C=\pi$，所以 $B+C=\pi-A$，于是 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin\frac{A}{2}+\cos A=-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}+1=-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$.因为 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以当且仅当 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取得最大值 $\frac{3}{2}$.故 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取得最大值时，$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)设角 $A,B,C$ 所对的边长分别为 $a,b,c$，由余弦定理，得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，即 $bc+4=b^2+c^2\geqslant2bc$，所以 $bc\leqslant4$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号.又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$. 当且仅当 $a=b=c=2$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，最大值为 $\sqrt{3}$.

19.(1)**证明**：因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2$，即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$，因为 $\boldsymbol{a}^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，$\boldsymbol{b}^2=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2)**解**：因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+\sin\beta)=(0,1)$，所以 $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=0,①\\ \sin\alpha+\sin\beta=1,②\end{cases}$

由①²+②²，得 $\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$.因为 $0<\alpha<\beta<\pi$，所以 $0<\beta-\alpha<\pi$，所以 $\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$，即 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$，代入②得 $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=1$，整理得 $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=1$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1$.因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

20.**解**：设在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，则由已知得，$a=\sqrt{3}$.

(1)由正弦定理及已知，得 $b=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}=\sqrt{2}$.由三角形内角和定理，得 $C=\frac{5\pi}{12}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sin\frac{5\pi}{12}$.而 $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$，即新型工业园的面积为 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ 平方千米.

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$.由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant bc$，所以 $bc\leqslant3$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时取等号. 所以 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，则新型工业园的最大面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 平方千米.

21.**解**：(1)由 $a\cos A=b\cos B$ 及正弦定理，可得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin2A=\sin2B$，又 $A\in(0,\pi)$，$B\in(0,\pi)$，所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，与 $A+B=\frac{\pi}{2}$ 矛盾，所以 $A=B$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题设，在 Rt$\triangle PMB$ 中，$PM=PB\cdot\sin\angle PBM=2\sin\alpha$；在 Rt$\triangle PNB$ 中，$PN=PB\cdot\sin\angle PBN=PB\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle PBA\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $PM+PN=2\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，故当 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，$PM+PN$ 取得最大值 2.

22.**解**：(1)由已知得 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(k\sin\frac{x}{3},\cos^2\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{3},-k\right)=k\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-k\cos^2\frac{x}{3}=\frac{1}{2}k\sin\frac{2x}{3}-k\cdot\frac{1+\cos\frac{2x}{3}}{2}=\frac{k}{2}\left(\sin\frac{2x}{3}-\cos\frac{2x}{3}\right)-\frac{k}{2}=\frac{\sqrt{2}k}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{2x}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)-\frac{k}{2}=\frac{\sqrt{2}k}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{k}{2}$.因为 $x\in\mathbf{R}$，$k>0$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}k=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，所以 $k=1$.

(2)由(1)知，$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$，所以 $f(A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=0$，化简，得 $\sin\left(\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.因为 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，所以 $\frac{\pi}{12}<\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{12}$，则 $\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，解得 $A=\frac{3\pi}{4}$. 因为 $\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-40}{2bc}$，所以 $b^2+c^2+\sqrt{2}bc=40$，则 $b^2+c^2+\sqrt{2}bc=40\geqslant2bc+\sqrt{2}bc$，所以 $bc\leqslant\frac{40}{2+\sqrt{2}}=20(2-\sqrt{2})$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}bc\geqslant20(1-\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值为 $20(1-\sqrt{2})$.





## 第 25 期

## 第 2~3 版专题检测题参考答案

**一、选择题**

1.D　2.B　3.C　4.C　5.C　6.A
7.D　8.D　9.D　10.D　11.A
12.A

**提示**：$f(x)=|xe^x|=\begin{cases}xe^x,x\geqslant0,\\ -xe^x,x<0,\end{cases}$ 当 $x\geqslant0$ 时，$f'(x)=e^x+xe^x\geqslant0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数；当 $x<0$ 时，$f'(x)=-e^x-xe^x=-e^x(x+1)$，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)=-e^x(x+1)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)=-e^x(x+1)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数，所以函数 $f(x)=|xe^x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最大值为 $f(-1)=-(-1)e^{-1}=\frac{1}{e}$.要使方程 $[f(x)]^2+tf(x)+1=0(t\in\mathbf{R})$ 有四个不同的实数根，令 $f(x)=m$，则方程 $m^2+tm+1=0$ 应有两个不同的实根，且一个根在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 内，一个根在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 内.令 $g(m)=m^2+tm+1$，因为 $g(0)=1>0$，则只需 $g\left(\frac{1}{e}\right)<0$，即 $\left(\frac{1}{e}\right)^2+\frac{t}{e}+1<0$，解得 $t<-\frac{e^2+1}{e}$，所以使得方程 $[f(x)]^2+tf(x)+1=0(t\in\mathbf{R})$ 有四个不同的实数根的 $t$ 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{e^2+1}{e}\right)$.

**二、填空题**

13.$\left(\frac{1}{2},1\right]$　14.2　15.4

16.②④

**提示**：因为函数 $f(x)$ 对其定义域内的任意 $x_1,x_2$，当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$，则称 $f(x)$ 为紧密函数，所以紧密函数 $f(x)$ 的自变量与函数值是一一映射，单调函数一定是紧密函数，但紧密函数不一定是单调的，故①错误；$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}(x>0)$ 可化为 $f(x)=x+\frac{a}{x}+2(x>0)$，所以 $f(x)(x>0)$ 在 $a<0$ 时是单调递增函数，故一定是紧密函数，故②正确；函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2x,x\geqslant2,\\ 2-x,x<2\end{cases}$ 不是一一映射，所以该函数不是紧密函数，故③错误；若函数 $f(x)$ 为定义域内的紧密函数，$x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，故④正确；函数 $f(x)=x^3$ 是紧密函数且在定义域内存在导数，则其导函数 $f'(x)=3x^2$ 在定义域内的值可以为零，故⑤错误.

**三、解答题**

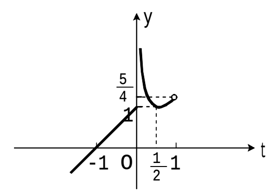
17.**解**：令 $x-3=u$，则 $x=u+3$，于是 $f(u)=\log_a\frac{3+u}{3-u}(a>0,a\neq1,-3<u<3)$，所以 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}(a>0,a\neq1,-3<x<3)$.

(1)因为 $f(-x)+f(x)=\log_a\frac{3-x}{3+x}+\log_a\frac{3+x}{3-x}=\log_a1=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，又定义域 $(-3,3)$ 关于原点对称，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)令 $t=\frac{3+x}{3-x}=-1-\frac{6}{x-3}$，则 $t$ 在 $(-3,3)$ 上是增函数.当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_at$ 是减函数，所以 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}(0<a<1)$ 在 $(-3,3)$ 上是减函数，即函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-3,3)$.

18.**解**：(1)由题意，知 $g(f(1))=g(-3)=-3+1=-2$.

(2)令 $f(x)=t$，则原方程化为 $g(t)=a$，易知方程 $f(x)=t$ 在 $t\in(-\infty,1)$ 内有 2 个不同的解，则原方程有 4 个解等价于函数 $y=g(t)(t<1)$ 与 $y=a$ 的图象有 2 个不同的交点.作出函数 $y=g(t)(t<1)$ 的图象，由图象可知，当 $1\leqslant a<\frac{5}{4}$ 时，函数 $y=g(t)(t<1)$ 与 $y=a$ 有 2 个不同的交点，即所求 $a$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{5}{4}\right)$.



(第 18 题图)

19.**解**：(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$，$f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)$.当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$，单调递减区间是 $(-1,0)$.

(2)$f(x)=x(e^x-1-ax)$.令 $g(x)=e^x-1-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，若 $a\leqslant1$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，而 $g(0)=0$，从而当 $x\geqslant0$ 时，$g(x)\geqslant0$，即 $f(x)\geqslant0$.若 $a>1$，则当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，而 $g(0)=0$，从而当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$g(x)<0$，即 $f(x)<0$，不合题意.

综上，$a$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

20.**解**：(1)当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)=e^x+2a>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，令 $e^x+2a=0$，得 $x=\ln(-2a)$，所以当 $x\in(-\infty,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

(2)由(1)可知，当 $a\geqslant0$ 时，函数 $f(x)=e^x+2ax>0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，不符合题意；当 $a<0$ 时，当 $x\in(-\infty,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，①当 $\ln(-2a)\leqslant1$，即 $-\frac{e}{2}\leqslant a<0$ 时，$f(x)$ 最小值为 $f(1)=2a+e$.解 $2a+e=0$，得 $a=-\frac{e}{2}$，符合题意.

②当 $\ln(-2a)>1$，即 $a<-\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)$，解 $-2a+2a\ln(-2a)=0$，得 $a=-\frac{e}{2}$，不符合题意.综上，$a=-\frac{e}{2}$.

(3)构建新函数 $g(x)=e^x-e^{-x}+2ax$，$g'(x)=e^x+e^{-x}+2a$.①当 $2a\geqslant-2$，即 $a\geqslant-1$ 时，因为 $e^x+e^{-x}\geqslant2$，所以 $g'(x)\geqslant0$(当且仅当 $a=-1$，$x=0$ 时，$g'(x)=0$)，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，所以，当 $a\geqslant-1$ 时，对于任意 $x\geqslant0$ 都有 $g(x)\geqslant0$；②当 $a<-1$ 时，解 $e^x+e^{-x}+2a<0$，即 $(e^x)^2+2ae^x+1<0$，得 $-a-\sqrt{a^2-1}<e^x<-a+\sqrt{a^2-1}$，其中 $0<-a-\sqrt{a^2-1}<1$，$-a+\sqrt{a^2-1}>1$，所以 $\ln(-a-\sqrt{a^2-1})<x<\ln(-a+\sqrt{a^2-1})$，且 $\ln(-a-\sqrt{a^2-1})<0$，$\ln(-a+\sqrt{a^2-1})>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ln(-a+\sqrt{a^2-1}))$ 上单调递减，又 $g(0)=0$，所以存在 $x_0\in(0,\ln(-a+\sqrt{a^2-1}))$，使 $g(x_0)<0$，不符合题意.

综上，$a$ 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

21.**解**：(1)$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{a(x+2)^2-4(1+ax)}{(1+ax)(x+2)^2}=\frac{ax^2-4(1-a)}{(1+ax)(x+2)^2}$.

因为 $(1+ax)(x+2)^2>0$，所以当 $1-a\leqslant0$，即 $a\geqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，由(1)可得当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$，则 $-\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}>-\frac{1}{a}\Rightarrow a\neq\frac{1}{2}$，即 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$，则 $\pm\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$ 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，代入 $f(x_1)+f(x_2)>0$，可得 $f(x_1)+f(x_2)=\ln[1+2\sqrt{a(1-a)}]+\ln[1-2\sqrt{a(1-a)}]-\frac{4\sqrt{1-a}}{2\sqrt{1-a}+2\sqrt{a}}-\frac{-4\sqrt{1-a}}{-2\sqrt{1-a}+2\sqrt{a}}=\ln[1-4a(1-a)]+\frac{4(1-a)}{2a-1}=\ln(1-2a)^2+\frac{2}{2a-1}-2$.

令 $2a-1=t$，则 $g(t)=\ln t^2+\frac{2}{t}-2$，由 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ 知，当 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$t\in(-1,0)$；当 $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$t\in(0,1)$.当 $t\in(-1,0)$ 时，$g(t)=2\ln(-t)+\frac{2}{t}-2$，对 $g(t)$ 求导可得 $g'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}=\frac{2(t-1)}{t^2}<0$.所以函数 $g(t)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，则 $g(t)<g(-1)=-4<0$，即 $f(x_1)+f(x_2)<0$ 不符合题意.

当 $t\in(0,1)$ 时，$g(t)=2\ln t+\frac{2}{t}-2$，对 $g(t)$ 求导可得 $g'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}=\frac{2(t-1)}{t^2}<0$，所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 $g(t)>g(1)=0$，即 $f(x_1)+f(x_2)>0$ 恒成立.

综上，$a$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

22.**解**：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=-\frac{x}{e^x}$.当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，也是最大值，最大值为 $f(0)=1$.

(2)由题意，存在 $x_1,x_2\in[0,1]$，使得 $2\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ 成立，即 $2[\varphi(x)]_{\min}<[\varphi(x)]_{\max}$.因为 $\varphi(x)=xf(x)+tf'(x)+\frac{1}{e^x}=\frac{x^2+(1-t)x+1}{e^x}$，$x\in[0,1]$，所以 $\varphi'(x)=\frac{-x^2+(1+t)x-t}{e^x}=-\frac{(x-1)(x-t)}{e^x}$.①当 $t\geqslant1$ 时，$\varphi'(x)\leqslant0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $2\varphi(1)<\varphi(0)$，即 $t>3-\frac{e}{2}>1$，符合题意.②当 $t\leqslant0$ 时，$\varphi'(x)\geqslant0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $2\varphi(0)<\varphi(1)$，即 $t<3-2e<0$，符合题意.③当 $0<t<1$ 时，若 $x\in[0,t]$，则 $\varphi'(x)\leqslant0$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,t]$ 上单调递减；若

$x\in[t,1]$,则$\varphi'(x)\geqslant 0$,$\varphi(x)$在$[t,1]$上单调递增.所以$2\varphi(t)<\max\{\varphi(0),\varphi(1)\}$,即$2\cdot\frac{t+1}{e^t}<\max\left\{1,\frac{3-t}{e}\right\}$.(*)

由(1)知,函数$g(t)=2\cdot\frac{t+1}{e^t}$在$[0,1]$上单调递减,

故$\frac{4}{e}\leqslant 2\cdot\frac{t+1}{e^t}\leqslant 2$,而$\frac{2}{e}<\frac{3-t}{e}<\frac{3}{e}$,所以不等式(*)无解.

综上所述,t的取值范围为$(-\infty,3-2e)\cup\left(3-\frac{e}{2},+\infty\right)$.

## 第 26 期

### 第 2~3 版专题检测题参考答案

**一、选择题**

1~6.CBCBDB　　7~12.BACBCD

**二、填空题**

13.$\frac{1}{6}$

14.$\sqrt{13}$

15.3

16.①②④⑤

**提示:**对于①,由图可得$A_1D/\!/B_1C$,$A_1B/\!/D_1C$,所以平面$A_1BD/\!/$平面$CB_1D_1$,故①正确;对于②,因为$A_1$-ABD为正四面体,故$AA_1\perp BD$,所以$BB_1\perp BD$,则四边形$BDD_1B_1$为正方形,故②正确;对于③,$A_1$-$BDD_1B_1$是正四棱锥,所有棱长均相等,A到平面$BDD_1B_1$的距离等于$A_1$到平面$BDD_1B_1$的距离,等于$A_1$到$BDD_1B_1$中心的距离,为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$,故③错误;对于④,三棱锥$C_1$-$A_1BD$为正三棱锥,对棱互相垂直,则$A_1$在平面$BDC_1$上的射影为$\triangle BDC_1$的垂心,故④正确;对于⑤,$A_1$-ABD占整体的$\frac{1}{6}$,$A_1$-$BDD_1B_1$占整体的$\frac{1}{3}$,BDC-$B_1D_1C_1$占整体的$\frac{1}{2}$,故⑤正确.

**三、解答题**

17.**证明:**(1)因为底面ABCD是菱形,所以$AC\perp BD$.

因为$AC\perp PD$,$PD\cap BD=D$,所以$AC\perp$平面PBD.

(2)由(1),可知$AC\perp BD$.因为平面$PAC\perp$平面ABCD,平面PAC$\cap$平面ABCD=AC,BD$\subset$平面ABCD,所以BD$\perp$平面PAC.

因为PO$\subset$平面PAC,所以BD$\perp$PO.

因为底面ABCD是菱形,所以BO=DO,所以PB=PD.

18.**证明:**(1)由题意知,E为$B_1C$的中点,又D为$AB_1$的中点,所以DE$/\!/$AC.

又因为DE$\not\subset$平面$AA_1C_1C$,AC$\subset$平面$AA_1C_1C$,

所以DE$/\!/$平面$AA_1C_1C$.

(2)因为三棱柱$ABC$-$A_1B_1C_1$是直三棱柱,所以$CC_1\perp$平面ABC.因为AC$\subset$平面ABC,所以$AC\perp CC_1$.

又因为$AC\perp BC$,$CC_1\subset$平面$BCC_1B_1$,BC$\subset$平面$BCC_1B_1$,$BC\cap CC_1=C$,所以AC$\perp$平面$BCC_1B_1$.

又因为$BC_1\subset$平面$BCC_1B_1$,所以$BC_1\perp AC$.

因为$BC=CC_1$,所以矩形$BCC_1B_1$是正方形,所以$BC_1\perp B_1C$.

因为AC,$B_1C\subset$平面$B_1AC$,$AC\cap B_1C=C$,所以$BC_1\perp$平面$B_1AC$.

又因为$AB_1\subset$平面$B_1AC$,所以$BC_1\perp AB_1$.

19.(1)**证明:**因为平面$ABCD\perp$平面$ABE$,平面$ABCD\cap$平面$ABE=AB$,$BC\perp AB$,$BC\subset$平面$ABCD$,所以$BC\perp$平面$ABE$.

因为$AE\subset$平面$ABE$,所以$BC\perp AE$.因为点$E$在以$AB$为直径的半圆上,所以$AE\perp BE$.

因为$BE\cap BC=B$,$BC,BE\subset$平面$BCE$,

所以$AE\perp$平面$BCE$.

因为$CE\subset$平面$BCE$,所以$AE\perp CE$.

(2)①**证明:**由题意知,平面$ABE\cap$平面$CED=EF$.因为$AB/\!/CD$,$AB\not\subset$平面$CED$,$CD\subset$平面$CED$,所以$AB/\!/$平面$CED$.

因为$AB\subset$平面$ABE$,平面$ABE\cap$平面$CED=EF$,所以$AB/\!/EF$.

②**解:**如图,取$AB$中点$O$,$EF$的中点$O'$,连接$OF$,$OO'$.

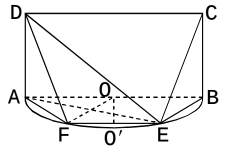
在$\mathrm{Rt}\triangle OO'F$中,$OF=1$,$O'F=\frac{1}{2}$,

所以$OO'=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$BC\perp$平面$ABE$,$AD/\!/BC$,

所以$AD\perp$平面$ABE$,

所以$V_{E-ADF}=V_{D-AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}EF\cdot OO'\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{12}$.



(第19题图)

20.(1)**证明:**因为$MA\perp$平面$ABCD$,$PD/\!/MA$,所以$PD\perp$平面$ABCD$.

又因为$BC\subset$平面$ABCD$,所以$PD\perp BC$.因为四边形$ABCD$为正方形,所以$BC\perp DC$.又因为$PD\cap DC=D$,所以$BC\perp$平面$PDC$.

在$\triangle PBC$中,因为$G$,$F$分别为$PB$,$PC$的中点,所以$GF/\!/BC$.所以$GF\perp$平面$PDC$.

又因为$GF\subset$平面$EFG$,所以平面$EFG\perp$平面$PDC$.

(2)**解:**因为$PD\perp$平面$ABCD$,四边形$ABCD$为正方形,不妨设$MA=1$,则$PD=AD=2$,所以$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}\times 4\times 2=\frac{8}{3}$.

因为$MA\perp$平面$ABCD$,$AB\subset$平面$ABCD$,所以$MA\perp AB$.又因为四边形$ABCD$为正方形,所以$AD\perp AB$.又因为$AD\cap MA=A$,所以$AB\perp$平面$MADP$.

因为$MA/\!/PD$,所以$S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}AM\cdot AD=1$,

所以$V_{P-MAB}=V_{B-PAM}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot AB=\frac{1}{3}\times 1\times 2=\frac{2}{3}$.

所以$V_{P-MAB}:V_{P-ABCD}=1:4$.

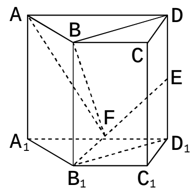
21.(1)**证明:**因为侧棱$DD_1\perp$底面ABCD,AB$\subset$底面ABCD,

所以$DD_1\perp AB$.在梯形ABCD中,因为AD=2,BC=DC=1,所以$AB=BD=\sqrt{2}$,

所以$AB^2+BD^2=AD^2$,所以$BD\perp AB$.

又$BD\cap DD_1=D$,所以AB$\perp$平面$BDD_1B_1$,

又$B_1E\subset$平面$BDD_1B_1$,所以$B_1E\perp AB$.



(第21题图)

(2)**解:**如图,连接BF,由(1)知,直线AF在平面$BDD_1B_1$内的射影为直线BF,

所以$\angle AFB$是直线AF与平面$BDD_1B_1$所成的角.

在矩形$BDD_1B_1$中,$B_1E=\sqrt{3}$,

在$\mathrm{Rt}\triangle B_1D_1E$中,$\cos\angle B_1ED_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$BF=\sqrt{BB_1^2+\left(\frac{B_1E}{3}\right)^2-2BB_1\cdot\frac{B_1E}{3}\cdot\cos\angle BB_1E}$

$=\sqrt{4+\frac{1}{3}-2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$.

所以在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中,$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}$,

所以直线AF与平面$BDD_1B_1$所成角的正弦值为$\sin\angle AFB=\frac{AB}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

22.(1)**证明:**如图,连接$AG$并延长交$BC$于$P$,连接$PF$,$NP$.因为点$G$为$\triangle ABC$的重心,所以$\frac{AG}{AP}=\frac{2}{3}$.又$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,所以$\frac{AG}{AP}=\frac{AM}{AF}=\frac{2}{3}$,所以$GM/\!/PF$.因为$N$为$AB$的中点,$P$为$BC$的中点,所以$NP/\!/AC$.又$AC/\!/DF$,所以$NP/\!/DF$,得$P,D,F,N$四点共面.所以$PF\subset$平面$DFN$.所以$GM/\!/$平面$DFN$.

(2)**解:**因为平面$ABC\perp$平面$BCDE$,$AP\perp BC$,所以$AP\perp$平面$BCDE$.连接$PE$,易得$PE\perp BC$.以点$P$为原点,$PC$所在直线为$x$轴,$PE$所在直线为$y$轴,$PA$所在直线为$z$轴建立空间直角坐标系,如图所示,

则$C(1,0,0)$,$D(1,1,0)$,$A(0,0,\sqrt{3})$,$F\left(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B(-1,0,0)$,$N\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CD}=(0,1,0)$.

设$M(x,y,z)$,因为$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AF}$,所以$M\left(\frac{\lambda}{2},\lambda,\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$,$\overrightarrow{NM}=\left(\frac{\lambda+1}{2},\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$.

因为$MN$与$CD$所成角为$\frac{\pi}{3}$,

所以$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{NM}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$

$=\frac{\lambda}{\sqrt{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2+\lambda^2+\frac{3}{4}(1-\lambda)^2}}$

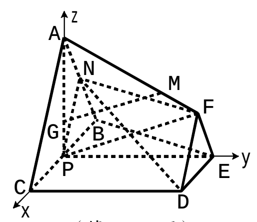
$=\frac{1}{2}$,

得$2\lambda^2+\lambda-1=0$,

解得$\lambda=\frac{1}{2}$,或$\lambda=-1$(舍去),

所以$M\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

设平面$MBC$的法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$又$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$,得$\begin{cases}2a=0,\\ \frac{5}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{3\sqrt{3}}{4}c=0,\end{cases}$令c=-2,得$\boldsymbol{n}=(0,3\sqrt{3},-2)$.平面$BCD$的一个法向量为$m=(0,0,1)$.所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},m\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot m|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|m|}=\frac{2\sqrt{31}}{31}$.由图可知,二面角$M-BC-D$为锐二面角,所以二面角$M-BC-D$的余弦值为$\frac{2\sqrt{31}}{31}$.



(第22题图)





## 第 27 期

### 第 2~3 版专题检测题参考答案

**一、选择题**

1.C　2.B　3.A　4.B　5.B　6.D　7.D

8.A　9.C　10.A　11.C

12.B

**提示:**$f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(2x+\varphi)$,其中$\tan\varphi=\frac{b}{a}$.因为$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$,所以$x=\frac{\pi}{6}$是函数$f(x)$的图象的一条对称轴,所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$,即$\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in Z)$,又$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$,所以$\varphi$的取值可以是$-\frac{5\pi}{6}$,所以$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$,由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$,得$k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$,故选B.

**二、填空题**

13.$-\frac{1}{9}$　14.$-\frac{9}{7}$　15.2

16.①③④

**提示:**由题意知,$\cos\theta=\frac{x}{r}$,$\sin\theta=\frac{y}{r}$,所以$f(\theta)=\frac{x-y}{r}=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.因为$-1\leqslant\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,所以$f(\theta)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,①正确;当$\theta=0$时,$f(\theta)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=1$,所以$f(\theta)$的图象不关于原点对称,②错误;当$\theta=\frac{3\pi}{4}$时,$f(\theta)=\sqrt{2}\cos\pi=-\sqrt{2}$,所以$f(\theta)$的图象关于直线$\theta=\frac{3\pi}{4}$对称,③正确;$f(\theta)$是周期函数,$T=2\pi$,④正确;令$2k\pi\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,得$2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,⑤错误.

**三、解答题**

17.**解:**(1)$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$,即$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$2\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$,所以$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以$\sin 2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1),知$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$,又$2\alpha\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$,所以$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.故$\tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-2\times\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$.

18.**解:**(1)因为$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$,所以$F(x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)^2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,所以函数$F(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.又由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得$k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,所以函数$F(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)由题意知$\cos x+\sin x=2(\cos x-\sin x)$,所以$\tan x=\frac{1}{3}$,所以$\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x-\sin x\cos x}=\frac{\cos^2x+2\sin^2x}{\cos^2x-\sin x\cos x}=\frac{1+2\tan^2x}{1-\tan x}=\frac{11}{6}$.

19.**解:**(1)因为$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 2x-\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.由$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in Z$,得$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in Z$,所以$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in Z$.

(2)因为$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$x=\frac{\pi}{3}$时,$[f(x)]_{max}=1$;当$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$,即$x=-\frac{\pi}{6}$时,$[f(x)]_{min}=-1$.

20.**解:**(1)$f(x)=\sin\omega x+\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega x-\cos\omega x$.当$\omega=\frac{1}{2}$时,$f(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$,而$-1\leqslant\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,所以$f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$,此时$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in Z$,即$x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi$,$k\in Z$,所以$f(x)$取最大值时,相应的x的集合为$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi,k\in Z\right\}$.

(2)依题意$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=0$,即$\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=k\pi$,$k\in Z$,整理,得$\omega=8k+2$,$k\in Z$,又$0<\omega<10$,所以$0<8k+2<10$,所以$-\frac{1}{4}<k<1$,而$k\in Z$,所以$k=0$,$\omega=2$,所以$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,所以$f(x)$的最小周期为$\pi$.

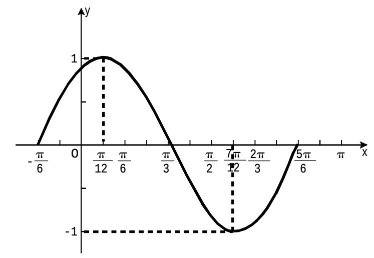
21.**解:**(1)$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1+\sin 2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$,由$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$,得$2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,即$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.所以$f(x)$图象的对称中心的坐标为$\left(\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)令$h(x)=f(x)-\frac{1}{2}$,则$h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,所以$g(x)=h\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

列表:

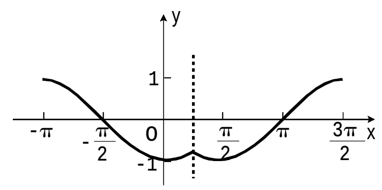
| $2x+\frac{\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| $g(x)$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

描点、连线得函数$y=g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上的图象,如图所示.



(第21题图)

22.**解:**(1)y=f(x)的图象如图所示.



(第22题图)

(2)任取$x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{4}\right]$,则$\frac{\pi}{2}-x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$,因为函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称,所以$f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,又当$x\geqslant\frac{\pi}{4}$时,$f(x)=-\sin x$,则$f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$,即$f(x)=\begin{cases}-\cos x,x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{4}\right),\\ -\sin x,x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right].\end{cases}$