4.B
5.D
6.B

提示:据已知可转化为$\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}>\dfrac{127}{64}$,整理得$2^n>128$,解得$n>7$,故初始值为$n=8$.

7.C

提示:正三角形的边对应正四面体的面,即正三角形表示的侧面,所以边的中点对应的就是正三角形的中心.

8.C

提示:垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.A

提示:三棱柱有0个对角面;四棱柱有2个对角面$(0+2=0+(3-1))$;五棱柱有5个对角面$(2+3=2+(4-1))$;六棱柱有9个对角面$(5+4=5+(5-1))$.

猜想:若k棱柱有$f(k)$个对角面,则$(k+1)$棱柱有$f(k)+k-1$个对角面.故选A.

10.C

提示:因为$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$,

依此类推可得:$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$,所以$\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$,$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$,$m=13,n=20$,即$1\leqslant x\leqslant13,1\leqslant y\leqslant20$.又$\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$,把$\frac{y+1}{x+1}$看成点$(x,y)$,$(-1,-1)$连线的斜率,结合$m\leqslant n,m,n\in N_+$,在满足条件的点中,$(13,1)$,$(-1,-1)$连线的斜率最小,为$\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$,故$\frac{x+y+2}{x+1}$最小值为$\frac{8}{7}$.故选C.

11.A

提示:当$n=k$时式子为$4^{2k-1}+3^{k+1}$,则$n=k+1$时,式子为$4^{2k+1}+3^{k+2}=4^2\times4^{2k-1}+3\times3^{k+1}=16\times(4^{2k-1}+3^{k+1})-13\times3^{k+1}$,显然A正确,故选A.

12.B

提示:由数据可知,进入立定跳远决赛的8人为1~8号,所以进入30秒跳绳决赛的6人从1~8号里产生.数据排序后可知3号,6号,7号必定进入30秒跳绳决赛,则得分为63,a,60,63,$a-1$的5人中有3人进入30秒跳绳决赛.若1号,5号学生未进入30秒跳绳决赛,则4号学生就会进入决赛,与事实矛盾,所以1号,5号学生必进入30秒跳绳决赛.故选B.

二、填空题

13.$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant2ab+2bc+2ac$,$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant0$

14.$\frac{8}{65}$

提示:观察猜想可得:$a_n=\frac{n}{n^2+1}$,所以当输入数据8时,输出数据为$\frac{8}{8^2+1}=\frac{8}{65}$.

15.$\frac{a^3}{8}$

16.③

提示:对于①②④可举反例,说明条件不能推出结论,如①中:$a=b=\frac{1}{2}$,②中:$a=b=1$,④中:$a=-1,b=-2$.对于③,反设a,b都小于等于1,则$a+b\leqslant2$与已知矛盾.

所以假设不成立,故③正确.

三、解答题

17.**证明**:假设$\frac{1}{4}$在$f(x)$的定义域内,

因为$f(xy)=f(x)+f(y)$,

所以$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

又$f(x)$的值域为$[-1,1]$,$2\notin[-1,1]$,

所以$\frac{1}{4}$不在函数$f(x)$的定义域内.

18.**解**:$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下:因为a,b,c是互不相等的正数,

所以$a+c>2\sqrt{ac}$.

因为$b^2=ac$,所以$ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即$ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而$(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为$f(x)=\log_2x$是增函数,

所以$\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即$\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故$f(a)+f(c)>2f(b)$.

19.**证明**:作斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的直截面DEF,分别交AA_1,BB_1,CC_1于点D,F,E,则$\angle DFE$为平面ABB_1A_1与平面BCC_1B_1所成角.在$\triangle DEF$中有余弦定理:$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$,两边同乘以$AA_1^2$,得$DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\angle DFE$.

即$S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\angle DFE$.

20.**证明**:要证明$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$,只需证明$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}>0$即可.

因为$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}=\frac{a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)}{(a+m)(b+m)(c+m)}$,

因为$a>0,b>0,c>0,m>0$,

所以$(a+m)(b+m)(c+m)>0$,

因为$a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)=abc+abm+acm+am^2+abc+abm+bcm+bm^2-abc-bcm-acm-cm^2=2abm+am^2+abc+bm^2-cm^2=2abm+abc+(a+b-c)m^2$,

因为$\triangle ABC$中任意两边之和大于第三边,

所以$a+b-c>0$,所以$(a+b-c)m^2>0$,

所以$2abm+abc+(a+b-c)m^2>0$,

所以$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

21.**解**:$\triangle ABC$是锐角三角形.

因为$c^n=a^n+b^n(n>2)$,所以$c>a,c>b$,由c是$\triangle ABC$的最大边,所以要证$\triangle ABC$是锐角三角形,只需证角C为锐角,即证$\cos C>0$.

因为$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

所以要证$\cos C>0$,

只要证$a^2+b^2>c^2$, ①

注意到条件:$a^n+b^n=c^n$,

于是将①等价变形为:

$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$. ②

因为$c>a,c>b,n>2$,

所以$c^{n-2}>a^{n-2},c^{n-2}>b^{n-2}$,

即$c^{n-2}-a^{n-2}>0,c^{n-2}-b^{n-2}>0$,

从而$(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$,

这说明②式成立,从而①式也成立.

故$\cos C>0$,C是锐角,所以$\triangle ABC$为锐角三角形.

22.**解**:由$x_1=\frac{1}{2}$及$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$,得$x_2=\frac{2}{3}$,$x_4=\frac{5}{8}$,$x_6=\frac{13}{21}$,

由$x_2>x_4>x_6$猜想:数列$\{x_{2n}\}$是递减数列.

下面用数学归纳法证明:

(1)当$n=1$时,已证命题成立.

(2)假设当$n=k$时命题成立,即$x_{2k}>x_{2k+2}$,那么$x_{2k+2}-x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\frac{\frac{1}{1+x_{2k+2}}-\frac{1}{1+x_{2k}}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$,

即$x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$,

也就是说,当$n=k+1$时命题也成立.结合(1)和(2)知命题成立.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.C

3.A

提示:A为演绎推理,这里省略了大前提,B为归纳推理,C,D为类比推理.

4.A

提示:根据三段论特点,过程应为:大前提是增函数的定义;小前提是$f(x)=2x+1$满足增函数的定义;结论是$f(x)=2x+1$为增函数,故①④正确.

5.B 6.B

7.A

提示:因为对于可导函数$f(x)$,若$f(x)$在区间(a,b)上是增函数,则$f'(x)\geqslant0$对$x\in(a,b)$恒成立.所以大前提错误,故选A.

8.B

提示:$1=1,3=1+2,6=1+2+3,10=1+2+3+4,\cdots$,第n个三角形数为$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

9.A

提示:如图所示,设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

则$F(-c,0)(c>0)$,$B(0,b)$,$A(a,0)$,

所以$\overrightarrow{FB}=(c,b)$,$\overrightarrow{AB}=(-a,b)$.

又因为$\overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{AB}$,

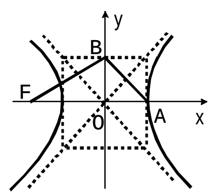
所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2-ac=0$,

所以$c^2-a^2-ac=0$,

所以$e^2-e-1=0$,

所以$e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

故选A.



(第9题图)

10.B

11.D

提示:由于甲不知自己的成绩,所以乙、丙一个优秀一个良好,因此乙知道丙,就知道自己成绩,同样丁知道甲成绩,就知道自己成绩,故选D.

12.A

二、填空题

13.$\log_2x-2\geqslant0$

提示:由三段论方法知应为$\log_2x-2\geqslant0$.

14.$\frac{4}{3}n(n+1)$

15.41

提示:根据题意,由于$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$,$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$,…,那么可知$\sqrt{6+\frac{a}{b}}=6\sqrt{\frac{a}{b}}$,$a=6,b=6\times6-1=35$,所以$a+b=41$.

16.πab;$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$

提示:当椭圆的离心率e趋近于0时,椭圆趋近于圆,此时a,b都趋近于圆的半径r,故由圆的面积$S=\pi r^2=\pi\cdot r\cdot r$,猜想椭圆面积$S_{椭}=\pi\cdot a\cdot b$.而由切线方程$x_0\cdot x+y_0\cdot y=r^2$变形得$\frac{x_0}{r^2}\cdot x+\frac{y_0}{r^2}\cdot y=1$,则过椭圆上一点$P(x_1,y_1)$的椭圆的切线方程为$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$.

三、解答题

17.**解**:①错误.小前提错误.因为若三点共线,则可确定无数平面,只有不共线的三点才能确定一个平面.

②错误.推理形式错误,演绎推理是由一般到特殊的推理,3,5,7,11只是奇数的一部分,是特殊事例.

18.**解**:因为$S_n=2n-a_n$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,$n\in N_+$,

所以,当$n=1$时,有$a_1=2-a_1$,

解得$a_1=1=2-\frac{1}{2^0}$;

当$n=2$时,有$a_1+a_2=2\times2-a_2$,

解得$a_2=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2^1}$;

当$n=3$时,有$a_1+a_2+a_3=2\times3-a_3$,

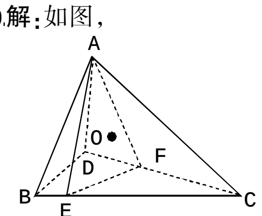
解得$a_3=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{2^2}$;

当$n=4$时,有$a_1+a_2+a_3+a_4=2\times4-a_4$,

解得$a_4=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{2^3}$.

猜想$a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in N_+)$.

19.**解**:如图,



(第19题图)

截面AEF经过四面体ABCD的内切球(与四个面都相切的球)的球心O,且与BC,DC分别交于E,F,若截面将四面体分为体积相等的两部分,则四棱锥A-BEFD与三棱锥A-EFC的表面积相等.

20.**解**:因为$f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$,

所以$f(0)+f(1)=\frac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-1)+f(2)=\frac{1}{3^{-1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-2)+f(3)=\frac{1}{3^{-2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

归纳猜想一般性结论:$f(-x)+f(x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明如下:$f(-x)+f(x+1)$

$=\frac{1}{3^{-x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{3^x}{1+\sqrt{3}\cdot3^x}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\cdot3^x)}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.(1)**证明**:如图1所示,由题意,得

$AD^2=BD\cdot DC,AB^2=BD\cdot BC,AC^2=BC\cdot DC$,

所以$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{BD\cdot DC}=\frac{BC^2}{BD\cdot BC\cdot DC\cdot BC}=\frac{BC^2}{AB^2\cdot AC^2}$.

又$BC^2=AB^2+AC^2$,

所以$\frac{1}{AD^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.

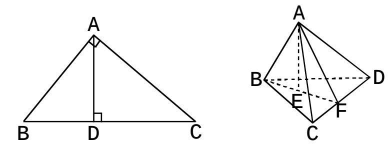


图1 图2

(第21题图)

(2)**解**:在四面体$ABCD$中,AB,AC,AD两两垂直,$AE\perp$平面BCD,则$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.理由如下:

如图2,连接BE并延长,交CD于点F,连接AF.

因为$AB\perp AC,AB\perp AD$,所以$AB\perp$平面ACD,

又$AF\subset$平面ACD,所以$AB\perp AF$.

在$Rt\triangle ABF$中,$AE\perp BF$,所以$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AF^2}$.

在$Rt\triangle ACD$中,$AF\perp CD$,所以$\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$,

所以 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.故猜想正确.

22.(1)**解**:已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$,$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,

求证:$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

(2)**证明**:构造函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$

$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$=nx^2-2x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

因为对一切 $x\in R$,都有 $f(x)\geqslant0$,

所以 $\Delta=4-4n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\leqslant0$,

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

提示:从证明过程来看,是从已知条件入手,经过推导得出结论,符合综合法的证明思路.

2.C

3.D

提示:A,与两相互垂直的直线平行的平面的位置关系不能确定;B,平面内的一条直线与另一个平面的交线垂直,这两个平面的位置关系不能确定;C,这两个平面有可能平行或重合;D 是成立的,故选 D.

4.C

5.B

提示:$q=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{nbc}{m}+cd}$

$\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

$=p$.

6.C

提示:选项 A 中命题条件较少,不足以正面证明;选项 B 中命题是否定性命题,可以用反证法证明;选项 D 中命题是至少性命题,可以用反证法证明.选项 C 不适合用反证法证明.故选 C.

7.C

提示:首先若 P、Q、R 同时大于零,则必有 $PQR>0$ 成立.其次,若 $PQR>0$,且 P、Q、R 不都大于0,则必有两个为负,不妨设 $P<0$,$Q<0$,即 $a+b-c<0$,$b+c-a<0$,两式相加得 $b<0$ 与 $b\in\mathbf{R}^+$ 矛盾,故 P、Q、R 都大于0.故选C.

8.B

9.C

提示:假设 $c/\!/b$,而由 $c/\!/a$,可得 $a/\!/b$,这与 a,b 异面矛盾,故 c 与 b 不可能是平行直线.故选 C.

10.B

提示:分 $\triangle ABC$ 的直线只能过一个顶点且与对边相交,如直线 AD(点 D 在 BC 上),则 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$,若 $\angle ADB$ 为钝角,则 $\angle ADC$ 为锐角.而 $\angle ADC>\angle BAD$,$\angle ADC>\angle ABD$,$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 不可能相似,与已知不符,只有当 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$ 时,才符合题意.

11.C

提示:由于 a,b,c 不全相等,则 a−b,b−c,c−a 中至少有一个不为 0,故①正确;②显然成立;令 a=2,b=3,c=5,满足 a≠c,b≠c,a≠b,故③错.

12.B

提示:因为 $x>0,y>0$,$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$,所以 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geqslant2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$,等号在 $y=4x$,即 $x=2$,$y=8$ 时成立,所以 $x+\frac{y}{4}$ 的最小值为4,要使不等式 $m^2-3m>x+\frac{y}{4}$ 有解,应有 $m^2-3m>4$,所以 $m<-1$ 或 $m>4$,故选 B.

二、填空题

13.$a\neq1$ 或 $b\neq1$

14.④

提示:因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$,所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$,所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,所以四边形 ABCD 为平行四边形.

15.AC⊥BD

提示:从结论出发,找一个使 $A_1C\perp B_1D_1$ 成立的充分条件.因而可以是:AC⊥BD 或四边形 ABCD 为正方形.

16.$\left[-2,\frac{3}{2}\right)$

提示:当 n 为偶数时,$a<2-\frac{1}{n}$,而 $2-\frac{1}{n}\geqslant2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,所以 $a<\frac{3}{2}$,

当 n 为奇数时,$a>-2-\frac{1}{n}$,而 $-2-\frac{1}{n}<-2$,所以 $a\geqslant-2$.

综上可得,$-2\leqslant a<\frac{3}{2}$.

三、解答题

17.**证明**:要证 $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$,

只需证:$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$,

只需证:$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$,

只需证:$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant2ab+2bc+2ca$,

只需证:$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant0$,而这是显然成立的,

所以 $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$ 成立.

18.**证明**:假设 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 成立,则 $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$,所以 $b^2=ac$.

又因为 $b=\frac{a+c}{2}$,所以 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$,即 $a^2+c^2=2ac$,即 $(a-c)^2=0$,

所以 $a=c$,这与 a,b,c 两两不相等矛盾,

所以 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 不成立.

19.**证明**:因为 $a^3-b^3=a^2-b^2$ 且 $a\neq b$,

所以 $a^2+ab+b^2=a+b$,

由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2$,得 $(a+b)^2>a+b$,

又 $a+b>0$,所以 $a+b>1$.

要证 $a+b<\frac{4}{3}$,即证 $3(a+b)<4$,

又因为 $a+b>0$,

所以只需证明 $3(a+b)^2<4(a+b)$,

又 $a+b=a^2+ab+b^2$,

即证 $3(a+b)^2<4(a^2+ab+b^2)$,也就是证明 $(a-b)^2>0$.

因为 a、b 是不相等的两个正数,故 $(a-b)^2>0$ 成立.

故 $a+b<\frac{4}{3}$ 成立.

综上,得 $1<a+b<\frac{4}{3}$.

20.**证明**:要证原式,只需证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$,

即证 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$,

即只需证 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=1$.

而由题意知 $A+C=2B$,

所以 $B=\frac{\pi}{3}$,

所以 $b^2=a^2+c^2-ac$.

所以 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc}$

$=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc}=1$.

所以原等式成立,即

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

21.**解**:假设三个方程均无实根,则

$\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\\Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\\Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\a<-1\text{或}a>\frac{1}{3},\\-2<a<0,\end{cases}$ 即 $-\frac{3}{2}<a<-1$,

所以当 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 时,三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数a的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.**解**:(1)证明:当 $a+b\geqslant0$ 时,$a\geqslant-b$ 且 $b\geqslant-a$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

所以 $f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$,

所以 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)(1)中命题的逆命题为“如果 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,那么 $a+b\geqslant0$”,此命题成立.

用反证法证明如下:

假设 $a+b<0$,则 $a<-b$,

所以 $f(a)<f(-b)$.

同理可得 $f(b)<f(-a)$.

所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,这与 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$ 矛盾,

故假设不成立,

所以 $a+b\geqslant0$ 成立,即(1)中命题的逆命题成立.

第 7 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.B

4.D

提示:项数为 $n^2-(n-1)=n^2-n+1$.

5.C 6.B 7.C 8.B

9.A

提示:因为从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的过渡,增加了 $(k+3)^3$,减少了 k^3,故利用归纳假设,只需证明 $(k+3)^3-k^3=9k^2+27k+27$ 能被 9 整除.

10.D

11.D

提示:在证明 n=k+1 时,没有使用归纳假设.

12.A

二、填空题

13.当 n=1 时,左边=4,右边=4,左边≥右边,不等式成立

14.$2k$

15.5

提示:当 $n=1$ 时,3^6+a^3 能被 14 整除的数有 $a=3$ 或 5,当 $a=3$ 且 $n=2$ 时,$3^{10}+3^5$ 不能被 14 整除,故 $a=5$.

16.没有用到归纳假设,不是数学归纳法.

三、解答题

17.**证明**:(1)当 n=1 时,左边=2,

右边 $=\frac{1\times(3+1)}{2}=2=$ 左边,等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1)$ 时等式成立,即

$(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+k)=\frac{k(3k+1)}{2}$.

则当 n=k+1 时,

左边 $=(k+2)+(k+3)+\cdots+(k+k)+(k+k+1)+(k+k+2)$

$=[(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+k)]+3k+2$

$=\frac{k(3k+1)}{2}+3k+2=\frac{3k^2+7k+4}{2}$

$=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$

$=\frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$,

所以 n=k+1 时,等式成立.

根据(1)和(2),可知对任意 $n\in N_+$,等式成立.

18.**证明**:(1)当 n=1 时,左边 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$,不等式成立.

(2)假设当 n=k 时,不等式成立,

当 n=k+1 时,不等式左边 $=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3(k+1)+1}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3(k+1)+1}-\frac{1}{k+1}\geqslant1+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\right)$.

欲证上式左边大于等于 1,只需证上式右边第二项大于等于 0.

$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$

$=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}-\frac{2}{3(k+1)}$

$=\frac{18(k+1)^2-2(3k+2)(3k+4)}{3(3k+2)(3k+4)(k+1)}$

$=\frac{2}{3(3k+2)(3k+4)(k+1)}>0$.

故当 n=k+1 时,不等式成立.

由(1)(2)知,不等式对任意 $n\in N_+$ 都成立.

19.**解**:由已知得 $2b_n=a_n+a_{n+1}$,$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$,$a_1=2$,$b_1=4$,

由此可得 $a_2=6$,$b_2=9$,$a_3=12$,$b_3=16$,$a_4=20$,$b_4=25$.

猜想 $a_n=n(n+1)$,$b_n=(n+1)^2$.

用数学归纳法证明如下:

①当 $n=1$ 时,可得结论成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时,结论成立,

即 $a_k=k(k+1)$,$b_k=(k+1)^2$,

那么当 $n=k+1$ 时,

$a_{k+1}=2b_k-a_k=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)\cdot(k+2)$,

$b_{k+1}=\frac{a_{k+1}^2}{b_k}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=(k+2)^2$.

所以当 $n=k+1$ 时,结论也成立.

由①②可知,$a_n=n(n+1)$,$b_n=(n+1)^2$ 对一切正整数 n 都成立.

20.**证明**:(1)当 $n=1$ 时,$x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 成立.

当 $n=2$ 时,$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant2+2>2+1$ 成立.

(2)假设当 $n=k$ 时,$x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1$ 成立.

那么,当 $n=k+2$ 时,$x^{k+2}+x^k+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+1+\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)\geqslant k+1+2=(k+2)+1$.

这表明,当 $n=k+2$ 时命题也成立.

根据(1)和(2),可知原不等式成立.

21.**证明**:当 $n=1$ 时,$2^1+2=4>n^2=1$,

当 $n=2$ 时,$2^2+2=6>n^2=4$,

当 $n=3$ 时,$2^3+2=10>n^2=9$,

当 $n=4$ 时,$2^4+2=18>n^2=16$,

由此可以猜想,

$2^n+2>n^2(n\in\mathbf{N}_+)$ 成立.

下面用数学归纳法证明:

①当 $n=1$ 时,左边 $=2^1+2=4$,右边 $=1$,所以左边>右边,所以原不等式成立.

当 $n=2$ 时,左边 $=2^2+2=6$,右边 $=2^2=4$,所以左边>右边;

当 $n=3$ 时,左边 $=2^3+2=10$,右边 $=3^2=9$,所以左边>右边.

②假设 $n=k(k\geqslant3$ 且 $k\in\mathbf{N}_+)$ 时,不等式成立,即 $2^k+2>k^2$,那么 $n=k+1$ 时,$2^{k+1}+2=2\cdot2^k+2=2(2^k+2)-2>2k^2-2$.

要证当 $n=k+1$ 时结论成立,只需证 $2k^2-2\geqslant(k+1)^2$,即证 $k^2-2k-3\geqslant0$,

即证 $(k+1)(k-3)\geqslant0$.

又因为 $k+1>0$,$k-3\geqslant0$,

所以 $(k+1)(k-3)\geqslant0$.

所以当 $n=k+1$ 时,结论成立.

由①②可知,$n\in\mathbf{N}_+$,$2^n+2>n^2$.

22.**解**:令 $n=1$,得 $\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{a+b}$,即 $a+b=8$. ①

又令 $n=2$,得 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}=\frac{2}{2a+b}$,即 $2a+b=12$. ②

联立①②,解得 $a=b=4$.

下面用数学归纳法证明:

(1)当 $n=1$ 时,命题显然成立.

(2)假设 $n=k$ 时,命题成立,即 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{k}{4k+4}$ 成立.

那么,当 $n=k+1$ 时,$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k}{4k+4}+\frac{1}{(4k+4)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(4k+4)(k+2)}=\frac{k+1}{4k+8}=\frac{k+1}{4(k+1)+4}$.

这表明,当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

综上所述,对任意的自然数 n,存在 $a=b=4$,使 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{an+b}$ 成立.

第 8 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B

提示:设 $n\in\mathbf{N}_+$,则数字 n 共有 n 个,所以 $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant100$,即 $n(n+1)\leqslant200$,又因为 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n=13$,到第 13 个 13 时共有 $\frac{13\times14}{2}=91$ 项,从第 92 项开始为 14,故第 100 项为 14.

2.D

3.C

提示:因为 $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$,$\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$,所以原不等式只需证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$,所以只需证 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$,故选 C.