答案页第1期
数学·人教A(选修2-2)
第1期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

2.D

提示:当$x=1$时,$y=1$;当$x=2$时,$y=4$,所以函数y在区间$[1,2]$上的平均变化率为$\frac{4-1}{2-1}=3$.

3.C

4.C

提示:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

5.B

提示:$f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}$,得$x_0=1$.

6.C

7.B

提示:$f(x)$,$g(x)$的常数项可以是任意的.

8.D

9.D

提示:令$f(x)=ax-\ln(x+1)$,所以$f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$.所以$f'(0)=a-1=2$.解得$a=3$,故选D.

10.D

提示:令$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2017)$,则$f(x)=x\cdot g(x)$.所以$f'(x)=x\cdot g'(x)+g(x)$.所以$f'(0)=g(0)=(-1)\times(-2)\times(-3)\times\cdots\times(-2017)=-1\times2\times\cdots\times2017$.

11.A

提示:因为$f(x)=x^m+ax$的导数为$f'(x)=2x+1$,所以$m=2$,$a=1$,所以$f(x)=x^2+x$,所以$f(n)=n^2+n=n(n+1)$,所以数列$\left\{\frac{1}{f(n)}\right\}(n\in\mathbf{N}_+)$的前$n$项和为:$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$,故选A.

12.C

提示:$h'(t)=-9.8t+14.7$.由$h'(2)=-4.9$,知烟花正以4.9m/s的瞬时速度下降,①错误;由$h'(1.5)=0$,知②正确.易知抛物线$h(t)$的对称轴为$t=1.5$.由于烟花在上升过程中速度越来越小,故在0~1.5s内,抛物线$h(t)$的切线倾斜程度越来越小,③错误;结合图象可知④正确.故②④正确.

二、填空题

13.$y=2(x-\pi)$

提示:$y'=(\sin2x)'=\cos2x\cdot(2x)'=2\cos2x$,所以$k=y'|_{x=\pi}=2$.又过点$(\pi,0)$,所以切线方程为$y=2(x-\pi)$.

14.2

提示:$s'=-8t+16$,由$-8t+16=0$,得$t=2$.

15.$\sqrt{2}-1$

提示:因为$f'(x)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x+\cos x$,所以$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:易知曲线$y=e^x$在点P处的切线与直线$y=x$平行时,点P到直线$y=x$的距离最小.由$y'=e^x$,令$y'=1$,得$x=0$,$y=1$,故$P(0,1)$.所以点P到直线$y=x$的最小距离为$\frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17.解:$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}]^2-(\sqrt{2x+3})^2}{\Delta x[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}]}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

18.解:(1)$y'=3^x\ln3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln2$

$=3^xe^x(\ln3+1)-2^x\ln2$.

(2)$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2x}$

$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$.

19.解:$s'(t)=6t+1$,$s'(4)=25$,故$v=25$m/s.

所以$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times10\times25^2=3125$(J).

答:运动开始后4s时物体的动能为3125J.

20.解:(1)曲线$f(x)$在$x=-3$处切线的斜率$f'(-3)>0$,所以在$x=-3$附近曲线是上升的,即函数$f(x)$在$x=-3$附近单调递增.

(2)曲线$f(x)$在$x=-2$处切线的斜率$f'(-2)<0$,所以在$x=-2$附近曲线是下降的,即函数$f(x)$在$x=-2$附近单调递减.

(3)曲线$f(x)$在$x=0$处切线的斜率$f'(0)$接近于0,所以函数$f(x)$在$x=0$附近几乎没有变化.

(4)曲线$f(x)$在$x=1$处切线的斜率$f'(1)>0$,所以在$x=1$附近曲线是上升的,即函数$f(x)$在$x=1$附近单调递增.

21.(1)解:$f'(x)=a-\frac{1}{(x+b)^2}$,于是

$$\begin{cases}f(2)=2a+\frac{1}{2+b}=3,\\ f'(2)=a-\frac{1}{(2+b)^2}=0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{9}{4},\\ b=-\frac{8}{3}.\end{cases}$

因为$a,b\in\mathbf{Z}$,所以$f(x)=x+\frac{1}{x-1}$.

(2)证明:在曲线$y=f(x)$上任取一点$\left(x_0,x_0+\frac{1}{x_0-1}\right)$.

由$f'(x_0)=1-\frac{1}{(x_0-1)^2}$,得过此点的切线方程为

$$y-\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=\left[1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0).$$

令$x=1$,得$y=\frac{x_0+1}{x_0-1}$,即切线与直线$x=1$的交点为$\left(1,\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$;

令$y=x$,得$y=2x_0-1$,即切线与直线$y=x$的交点为$(2x_0-1,2x_0-1)$.

又直线$x=1$与直线$y=x$的交点为$(1,1)$,

从而所围三角形的面积为

$\frac{1}{2}\left|\frac{x_0+1}{x_0-1}-1\right|\cdot|2x_0-1-1|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\cdot2|x_0-1|=2$.

所以所围三角形的面积为定值2.

22.(1)解:设切点为(x_0,y_0),则$y_0=3x_0-x_0^3$.

又$y'=3-3x^2$,所以切线斜率$k=\frac{y_0-2}{x_0-2}=3-3x_0^2$,即$3x_0-x_0^3-2=(x_0-2)(3-3x_0^2)$,解得$x_0=1$或$x_0=1\pm\sqrt{3}$,相应的斜率$k=0$或$k=-9\pm6\sqrt{3}$.所以切线方程为$y=2$或$y=(-9+6\sqrt{3})x+20-12\sqrt{3}$或$y=(-9-6\sqrt{3})x+20+12\sqrt{3}$.

(2)证明:与曲线S相切于点(x_0,y_0)的切线方程可设为$y-y_0=(3-3x_0^2)(x-x_0)$,与曲线S的方程联立并消去y,得$3x-x^3-y_0=3(1-x_0^2)(x-x_0)$,

即$3x-x^3-(3x_0-x_0^3)=3(1-x_0^2)(x-x_0)$,

化简得$(x-x_0)(x^2+xx_0-2x_0^2)=0$.①

对于$x^2+xx_0-2x_0^2=0$,$\Delta=x_0^2+8x_0^2=9x_0^2>0$,所以①式至少有两个解.

所以与曲线S切于点$(x_0,y_0)(x_0\neq0)$的切线与S至少还有一个交点.

数学·人教A(选修2-2)
第2期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

提示：分别举反例：(1)$y=\ln x$，(2)$y=\frac{1}{x}(x>0)$，(3)$y=2x$，(4)$y=x^2$，故选A.

2.A

提示：令$f'(x)<0$，解得$-4<x<1$.
故$f(x)$的单调递减区间是$(-4,1)$.

3.C

提示：$y'=27x-\frac{1}{x^2}=\frac{27x^3-1}{x^2}$.

令$y'>0$，解得$x>\frac{1}{3}$，故选C.

4.B　5.B　6.C　7.D

8.D

提示：由导函数图象可知，导数先是越来越大，则$f(x)$的图象越来越“陡峭”；随后导数越来越小，则$f(x)$的图象越来越“平缓”.故选D.

9.C

提示：$f'(x)=3ax^2+3$.若函数$f(x)$存在极值，则方程$3ax^2+3=0$有解，则$x^2=-\frac{3}{3a}>0$，所以$a<0$.

10.D

提示：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

令$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=0$，解得$x=3$.

当$x\in(0,3)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数；当$x\in(3,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数.

故$f(x)$有极小值$f(3)=1-\ln 3<0$.

又$f(1)=\frac{1}{3}>0$，$f(6)=2-\ln 6>0$，

故$f(x)$在$(0,3)$，$(3,+\infty)$内均有零点.

11.A

提示：因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，
所以$f'(x)>0$在$\mathbf{R}$上恒成立.
$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$.
当$x<0$时，由$f(x)<0$，得$g'(x)>0$，
故$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增；
当$x>0$时，$g'(x)$的符号不确定，
故$g(x)$的单调性不确定.故选A.

12.C

提示：由题意可知，$\exists x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$，使得$m<x-e^x\sqrt{x}$成立.

令$h(x)=x-e^x\sqrt{x}$，

则$h'(x)=1-e^x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

当$x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$时，$e^x\geqslant e^{\frac{1}{4}}>1$，

$\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$，从而$h'(x)<0$.

故$h(x)$在$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$上为减函数.

所以$h(x)\leqslant h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$.

所以$m<\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$.

二、填空题

13.20　14.$-2,-\frac{1}{2}$　15.$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

16.$\frac{32\sqrt{3}}{3}$

提示：设剪成的小正三角形的边长为x，则

$$S=\frac{(3-x)^2}{\frac{1}{2}(x+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-x)}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(3-x)^2}{1-x^2}(0<x<1),$$

$$S'=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(2x-6)\cdot(1-x^2)-(3-x)^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2(3x-1)(x-3)}{(1-x^2)^2}.$$

令$S'=0$，$0<x<1$，解得$x=\frac{1}{3}$.

当$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时，$S'<0$；

当$x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$时，$S'>0$.

故当$x=\frac{1}{3}$时，S取得最小值，最小值是$\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题

17.**解**：$f'(x)=\frac{b(x^2-1)-bx\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$=-\frac{b(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.
当$b>0$时，$f'(x)<0$，
故函数$f(x)$在$(-1,1)$上是减函数；
当$b<0$时，$f'(x)>0$，
故函数$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

18.**解**：(1)$f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x+1)(x-3)$.
令$f'(x)<0$，得$-1<x<3$.
所以$f(x)$的单调递减区间是$(-1,3)$.
(2)结合(1)，可得$f(x)$，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	−16	↗

所以$f(x)$的极大值为$f(-1)=16$，极小值为$f(3)=-16$.

19.**解**：$f'(x)=3ax^2+2bx-2$.

由条件知$\begin{cases}f'(-2)=12a-4b-2=0,\\ f'(1)=3a+2b-2=0,\\ f(-2)=-8a+4b+4+c=6,\end{cases}$

解得$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{8}{3}$.

所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{8}{3}$，

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.
令$f'(x)=0$，解得$x=-2$，或$x=1$.
当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	(-3,-2)	-2	(-2,1)	1	(1,3)
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	6	↘	$\frac{3}{2}$	↗

因此，极大值为$f(-2)=6$，极小值为$f(1)=\frac{3}{2}$.

又由于$f(-3)=\frac{25}{6}$，$f(3)=\frac{61}{6}$，

因此，函数$f(x)$在$[-3,3]$上的最大值是$\frac{61}{6}$，最小值是$\frac{3}{2}$.

20.**解**：设圆柱的底面半径为r，高为h，则由$\pi r^2h=V$，得$h=\frac{V}{\pi r^2}$.设造价为$f(r)$，则$f(r)=2\pi r^2a+2\pi rhb=2\pi r^2a+2\pi rb\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2a+\frac{2bV}{r}$.

令$f'(r)=4\pi ar-\frac{2bV}{r^2}=0$，得$r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$.

当$r<\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$时，$f'(r)<0$；

当$r>\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$时，$f'(r)>0$.

故当$r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$时，$f(r)$取得极小值.

此时$\frac{2r}{h}=\frac{2r\cdot\pi r^2}{V}=\frac{2\pi}{V}\cdot\frac{bV}{2\pi a}=\frac{b}{a}$.

答：锅炉的底面直径与高的比为$\frac{b}{a}$时，造价最低.

21.**解**：由$g(x)$的图象，可知$g(x)$的极大值为$\frac{5}{6}$.

由$g'(x)$的图象，可知$g'(x)=0$的两根是$x_1=1$，$x_2=2$，且$x=1$是$g(x)$的极大值点.

所以$g(1)=\frac{5}{6}$.

又$g'(x)=3ax^2+2bx+c$，

所以$\begin{cases}1+2=-\frac{2b}{3a},\\ 1\times 2=\frac{c}{3a},\\ a+b+c=\frac{5}{6},\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=-\frac{3}{2},\\ c=2.\end{cases}$

所以$g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$，

$g'(x)=x^2-3x+2$，

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{3}{2}+m\right)x^2+(2+3m)x-2m$.

若$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，
则$f'(x)=x^2-(3+2m)x+3m+2\geqslant 0$在$[2,+\infty)$上恒成立.
因为$\Delta=(3+2m)^2-4(3m+2)=4m^2+1>0$，

所以$\begin{cases}\frac{3+2m}{2}\leqslant 2,\\ f'(2)\geqslant 0,\end{cases}$解得$m\leqslant 0$.

所以实数m的取值范围是$(-\infty,0]$.

22.(1)**解**：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$.

当$0<x<1$时，$f'(x)>0$；
当$x>1$时，$f'(x)<0$.
所以$f(x)$在$x=1$处取得极大值$f(1)=a$.
若存在$x\in(0,+\infty)$使得$f(x)\geqslant 0$成立，
则$a\geqslant 0$.
所以实数a的取值范围是$[0,+\infty)$.

(2)**证明**：令$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-a-x\ln x-\frac{1}{2}$，

则$g'(x)=x+a-\ln x-1$.

由(1)可得$a\geqslant 0$，且$f(x)=\ln x-x+a+1\leqslant f(1)=a$，即$x-\ln x-1\geqslant 0$，所以$g'(x)\geqslant 0$.

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递增函数.

所以当$x>1$时，$g(x)>g(1)=0$，

即$\frac{1}{2}x^2+ax-a>x\ln x+\frac{1}{2}$.

数学·人教A(选修2-2)

第3期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.A

4.C

提示:由定积分的几何意义 $f(x)\geqslant 0$ 时,$\int_a^b f(x)dx$ 表示面积 S,当 $f(x)\leqslant 0$ 时,$\int_a^b f(t)dt=-S$.故选C.

5.A

提示:由定积分的几何意义易知 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 的面积的 $\frac{1}{4}$,故选A.

6.C

提示:分别解方程组 $\begin{cases}y=2,\\y=\ln x,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\ln x,\\x=e,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=e^2,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=e,\\y=1,\end{cases}$ 所以积分区间为 $[1,2]$.

7.D

提示:由定积分性质(3)求 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的定积分来实现,显然D正确.

8.D

提示:$\int_1^a\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx=(x^2+\ln x)\big|_1^a=a^2+\ln a-1=3+\ln 2$,所以 $a=2$.

9.D

提示:$\int_3^6 \frac{3}{\sqrt{6t}}dt=\sqrt{6t}\,\big|_3^6=6-3\sqrt{2}$,故选D.

10.B

提示:由 $\begin{cases}y=3-x^2,\\y=x^2-2x-1,\end{cases}$ 得交点 $A(-1,2)$,$B(2,-1)$,所以,面积:$S=\int_{-1}^2[(3-x^2)-(x^2-2x-1)]dx=\int_{-1}^2(-2x^2+2x+4)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^2=9$.故选B.

11.C

12.B

提示:由题意,得 $S_{阴}=2\int_0^1(e-e^x)dx=2(ex-e^x)\big|_0^1=2$,由几何概型得所求概率 $P=1-\frac{S_{阴}}{S_{正}}=1-\frac{2}{e^2}$.

二、填空题

13.$\frac{8}{3}$

提示:因为 $\int_0^1 \frac{1}{2}f(x)dx=1$,

所以 $\int_0^1 f(x)dx=2$,

因为 $\int_{-1}^0 3f(x)dx=2$,

所以 $\int_{-1}^0 f(x)dx=\frac{2}{3}$,

所以 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

14.152(m)

提示:路程 $s=\int_0^6(18t-3t^2)dt+\int_6^8(3t^2-18t)dt=(9t^2-t^3)\big|_0^6+(t^3-9t^2)\big|_6^8=9\times6^2-6^3+8^3-9\times8^2-6^3+9\times6^2=152$(m).

15.1

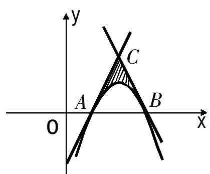
提示:因为 $f(1)=\lg1=0$,且 $\int_0^a 3t^2dt=t^3\big|_0^a=a^3-0^3=a^3$,所以 $f(0)=0+a^3=1$,所以 $a=1$.

16.$\frac{2}{3}$

提示:由 $y'=-2x+4$ 得在点 A,B 处切线的斜率分别为2和-2,则切线方程分别为 $y=2x-2$ 和 $y=-2x+6$.

由 $\begin{cases}y=2x-2,\\y=-2x+6,\end{cases}$ 得两切线交点坐标为 $C(2,2)$,

所以 $S=S_{\triangle ABC}-\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\frac{1}{2}\times2\times2-\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right)\Big|_1^3=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.



(第16题图)

三、解答题

17.解:(1)因为 $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=[\ln x-\ln(x+1)]\big|_1^2$

$=\ln\frac{4}{3}$.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+2^x)dx$

$=\left(\sin x+\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2+\frac{1}{\ln2}\left(2^{\frac{\pi}{2}}-2^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

18.解:因为 $f(1)=4$,

所以 $a+b+c=4$. ①

$f'(x)=2ax+b$,

因为 $f'(1)=1$,所以 $2a+b=1$, ②

$\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{19}{6}$, ③

由①②③,可得 $a=-1$,$b=3$,$c=2$.

所以 $f(x)=-x^2+3x+2$.

19.解:由题意,可知 $\int_0^{x_0}e^xdx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^xdx$,

即 $e^{x_0}-1=\frac{1}{2}(e^4-1)$,

所以 $e^{x_0}=\frac{1}{2}(e^4+1)$,

故 $x_0=\ln\frac{e^4+1}{2}$.

20.解:$V=4\int_0^6(6t-t^2)dt$

$=4\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^6$

$=4\left(3\times6\times6-\frac{1}{3}\times6\times6\times6\right)$

$=144(cm^3)$.

答:从 $t=0$ 到 $t=6s$ 这段时间流出的水量为 $144cm^3$.

21.解:(1)设速度-时间函数式为 $v(t)=v_0+at$,将点(0,40),(6,-20)的坐标分别代入,得 $v_0=40$,$a=-10$,所以 $v(t)=40-10t$.

令 $v(t)=0\Rightarrow40-10t=0\Rightarrow t=4$,

物体从0s运动到距离水平地面的最大值为

$s=\int_0^4(40-10t)dt=(40t-5t^2)\big|_0^4=80$(m).

(2)由上述可知,物体在0~6s内的位移为

$s=\int_0^6(40-10t)dt=(40t-5t^2)\big|_0^6=60$(m).

(3)由上述可知,物体在0~6s内的路程为

$s=\int_0^6|40-10t|dt$

$=\int_0^4(40-10t)dt-\int_4^6(40-10t)dt$

$=(40t-5t^2)-(40t-5t^2)\big|_4^6$

$=80+20=100$(m).

22.解:当 $a\leqslant0$ 时,

由题意可得 $\int_a^0(x^2-2x)dx=\frac{4}{3}$,

所以 $\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_a^0=\frac{4}{3}$,即 $a^3-3a^2+4=0$,

解得 $a=-1$,或 $a=2$.

又因为 $a\leqslant0$,所以 $a=-1$.

当 $0<a\leqslant2$ 时,由题意可得

$\int_0^a 0-(x^2-2x)dx=\int_0^a(2x-x^2)dx=\frac{4}{3}$,

即 $a^3-3a^2+4=0$,

解得 $a=2$,或 $a=-1$(舍去).

所以存在常数 $a=-1$ 或 $a=2$,使得由抛物线 $y=x^2-2x$ 及直线 $x=0$,$x=a$,$y=0$ 围成的平面图形的面积为 $\frac{4}{3}$.

数学·人教A(选修2-2)

第4期

第2~3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B 2.A 3.C 4.A 5.B 6.D 7.B 8.A

提示：$f'(x)=\frac{x^2+2ax-1}{(x+a)^2}$.

由题意，得 $f'(1)=0$，解得 $a=0$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.故 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

9.D

提示：由导函数 $y=f'(x)$ 的图象可知，$f(x)$ 先减后增，再递减，最后递增，排除A，C；极大值点在 x 轴的右侧，排除B，故选D.

10.D

提示：由 $l_1\perp l_2$，得 $4-2a=0$，即 $a=2$.

所以原式 $=\int_{-2}^{2}(x^3+\sin x-5)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3+\sin x)dx+\int_{-2}^{2}(-5)dx$

$=0-20=-20$.

11.B

提示：根据二次函数的性质，可知A不成立.对于B，设 $f(x)=e^x-ex$，则 $f'(x)=e^x-e$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=0$，所以 $f(x)\geqslant0$，故正确.同理，可知C，D均不恒成立.故选B.

12.B

提示：由题意，知 $xe^x+x^2+2x=-a$ 恰有两个不同的实数解.

设 $f(x)=xe^x+x^2+2x$，

则 $f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}-1$.

所以 $-a>-\frac{1}{e}-1$，解得 $a<\frac{1}{e}+1$.故选B.

二、填空题

13.3

14.-2

15.$\frac{4}{3}$

提示：设圆锥的高为 h，底面半径为 r，则 $1^2=(h-1)^2+r^2$，即 $r^2=2h-h^2$.

所以圆锥的体积

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

令 $V'(h)=\frac{4}{3}\pi h-\pi h^2=0$，

解得 $h=\frac{4}{3}$ 或 $h=0$(舍去).

易知当 $h=\frac{4}{3}$ 时，$V(h)$ 取得极大值也是最大值.

故当圆锥的体积最大时，圆锥的高为 $\frac{4}{3}$.

16.(3)(4)

提示：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，

则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $a<x<b$，

所以 $F(a)<F(x)<F(b)$，

即 $f(a)-g(a)<f(x)-g(x)<f(b)-g(b)$.

从而可知(3)(4)正确.

三、解答题

17.**解**：(1)化简，得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2e^x(2-x)}{(1-x)^2}$，

所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$，

所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**：(1)$f'(x)=3x^2-3$.

因为 P 为切点，

所以直线 l 的斜率 $k_1=f'(1)=0$，

所以直线 l 的方程为 $y=-2$.

(2)设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-3x_0)(x_0\neq1)$，

则直线 l 的斜率 $k_2=f'(x_0)=3x_0^2-3$，

所以直线 l 的方程为

$y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.

又直线 l 过点 $P(1,-2)$，

所以 $-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，

解得 $x_0=1$(舍去)或 $x_0=-\frac{1}{2}$.

故所求直线 l 的斜率 $k_2=3x_0^2-3=-\frac{9}{4}$，

所以直线 l 的方程为

$y-(-2)=-\frac{9}{4}(x-1)$，

即 $9x+4y-1=0$.

19.**解**：(1)$f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln2$；

令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln2$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递减，

在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln2)=2-\ln4$，无极大值.

(2)令 $g(x)=f(x)-x^2-(a-2)x-1=e^x-x^2-ax-1$，

则 $g'(x)=e^x-2x-a=f(x)-a$.

结合(1)可得

$[g'(x)]_{\min}=[f(x)]_{\min}-a=2-\ln4-a$.

因为 $a<2-\ln4$，所以 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $f(x)>x^2+(a-2)x+1$.

20.**解**：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x)dx=(b\sin x-a\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=b+a=4$.

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx=(b\sin x-a\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}a+a=\frac{7-3\sqrt{3}}{2}$，

解得 $a=3$，$b=1$.所以 $f(x)=3\sin x+\cos x=\sqrt{10}\sin(x+\varphi)\left(其中\tan\varphi=\frac{1}{3}\right)$.

故函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{10}$，最小值为 $-\sqrt{10}$.

21.(1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a}{x}+x-(a+1)$

$=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$.

因为函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $(x-1)(x-a)\leqslant0$ 在 $(1,3)$ 上成立.

解得 $a\geqslant3$.

所以 a 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

(2)**证明**：当 $a=-1$ 时，$f(x)=-\ln x+\frac{x^2}{2}$，

$f'(x)=-\frac{1}{x}+x=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=-1$(舍去).

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，也是最小值，为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 成立.

22.**解**：(1)种花区的造价为 $\frac{3a}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$，

种草区的造价为 $2a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$，

故总造价

$f(\theta)=a\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\theta\right)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(2)$f'(\theta)=$

$a\left[-\frac{1}{2}-(\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta)\right]$

$=a\left(-\frac{1}{2}-\cos2\theta\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $f'(\theta)=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

当 θ 变化时，$f'(\theta)$，$f(\theta)$ 的变化情况如下表：

θ	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	−	0	+
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

故当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，总造价最小，最小值为

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.