$2a=\sin 2x+2a$,所以方程 $\sin 2x+2a=-1$ 有解,所以 $-1\leqslant a\leqslant 0$,故所求 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

10.A

提示:$f'(x)=[x^2+(a+2)x+a-1]\cdot e^{x-1}$,则 $f'(-2)=[4-2(a+2)+a-1]\cdot e^{-3}=0\Rightarrow a=-1$.所以 $f(x)=(x^2-x-1)\cdot e^{x-1}$,$f'(x)=(x^2+x-2)\cdot e^{x-1}$.令 $f'(x)=0$,得 $x=-2$ 或 $x=1$.当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时,$f'(x)>0$;当 $-2<x<1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-1$.

11.D

12.C

提示:函数 $f(x)$ 的零点满足 $x^2-2x=-a(e^{x-1}+e^{-x+1})$.设 $g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}$,则 $g'(x)=e^{x-1}-e^{-x+1}=e^{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}}=\frac{e^{2(x-1)}-1}{e^{x-1}}$.令 $g'(x)=0$,得 $x=1$.当 $x<1$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减;当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增.当 $x=1$ 时,函数 $g(x)$ 取得最小值,最小值为 $g(1)=2$.设 $h(x)=x^2-2x$,当 $x=1$ 时,函数 $h(x)$ 取得最小值,最小值为 -1.显然 $a\neq 0$,若 $-a>0$,函数 $h(x)$ 与函数 $-ag(x)$ 的交点个数为 0 或 2;若 $-a<0$,当 $-ag(1)=h(1)$ 时,函数 $h(x)$ 和 $-ag(x)$ 只有一个交点,即 $-a\times 2=-1$,解得 $a=\frac{1}{2}$.故选 C.

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:因为 $\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\,\big|_0^{\pi}=2>\sqrt{2}$,所以 $\sqrt{2}\otimes\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\sqrt{2}\otimes 2=\frac{2-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14.$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant\sqrt{n}\ (n\in\mathbf{N}_+)$

15.6

16.$\frac{2}{3}$

三、解答题

17.**证明**:因为 $x\geqslant 1,y\geqslant 1$,所以 $x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy\Leftrightarrow xy(x+y)+1\leqslant y+x+(xy)^2$.

将上式中的右式减左式,得

$[y+x+(xy)^2]-[xy(x+y)+1]=[(xy)^2-1]-[xy(x+y)-(x+y)]=(xy+1)(xy-1)-(x+y)(xy-1)=(xy-1)(xy-x-y+1)=(xy-1)(x-1)(y-1)$.

因为 $x\geqslant 1,y\geqslant 1$,所以 $(xy-1)(x-1)(y-1)\geqslant 0$,从而所要证明的不等式成立.

18.**解**:$z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}=\frac{5(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$.

(1)$z_1+\overline{z}_2=(2-3i)+(1+3i)=3$.

(2)$z_1\cdot z_2=(2-3i)(1-3i)=2-9-9i=-7-9i$.

(3)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{2+9+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

19.**解**:(1)因为 $z=\frac{(1-i)^2+3(1+i)}{2-i}=\frac{-2i+3+3i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$,

所以若复数 z_1 与 z 在复平面上所对应的点关于虚轴对称,则它们实部互为相反数,虚部相等,所以 $z_1=-1+i$.

(2)因为复数 $z_2=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 满足 $z^2+az+b=1-i$,

所以 $(1+i)^2+a(1+i)+b=1-i$,

整理,得 $a+b+(2+a)i=1-i$,

所以 $\begin{cases}a+b=1,\\2+a=-1,\end{cases}$

解得 $a=-3,b=4$.

所以复数 $z_2=-3+4i$,

所以 z_2 的共轭复数为 $-3-4i$.

20.**解**:(1)当 $m=-2$ 时,$f(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $f'(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)+e^x(3x^2-4x-2)=xe^x(x^2+x-6)=(x+3)x(x-2)e^x$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=-3$,或 $x=0$,或 $x=2$,

所以当 $x\in(-\infty,3)$ 或 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(-3,0)$ 或 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减,在 $(-3,0)$ 上单调递增,在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{极小值}=f(-3)=-39e^{-3}$,$f(x)_{极小值}=f(2)=-2e^2$,$f(x)_{极大值}=f(0)=2$.

(2)$f'(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)+e^x(3x^2+2mx-2)=xe^x[x^2+(m+3)x+2m-2]$.

因为 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增,

所以当 $x\in[-2,-1]$ 时,$f'(x)\geqslant 0$.

又当 $x\in[-2,-1]$ 时,$xe^x<0$,

所以当 $x\in[-2,-1]$ 时,$x^2+(m+3)x+2m-2\leqslant 0$,

所以 $\begin{cases}(-2)^2-2(m+3)+2m-2\leqslant 0,\\(-1)^2-(m+3)+2m-2\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $m\leqslant 4$,

所以当 $m\in(-\infty,4]$ 时,$f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增.

21.(1)**证明**:依题意,$a_n=\sqrt{n^2+1}$,$b_n=n$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

假设 $\{c_n\}$ 是等差数列,则 $2c_2=c_1+c_3$,所以 $2(\sqrt{5}-2)=\sqrt{2}-1+\sqrt{10}-3$.

所以 $2\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{10}$,产生矛盾,

所以 $\{c_n\}$ 不是等差数列.

假设 $\{c_n\}$ 是等比数列,则 $c_2^2=c_1c_3$,即 $(\sqrt{5}-2)^2=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-3)$.

有 $6=6\sqrt{5}-3\sqrt{2}-\sqrt{10}$,产生矛盾,

所以 $\{c_n\}$ 也不是等比数列.

(2)**解**:因为 $c_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)>0$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n>0$,

所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}$,

因为 $0<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$,

又 $0<n<n+1$,

所以 $\sqrt{n^2+1}+n<\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1$,

所以 $0<\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$,

所以 $0<\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$,即 $c_{n+1}<c_n$.

22.(1)**解**:因为 $f(x)=x(ax-a-\ln x)\geqslant 0$,其中 $x>0$,所以 $ax-a-\ln x\geqslant 0$.

令 $g(x)=ax-a-\ln x$,则 $g(1)=0$,$g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,但 $g(1)=0$,故当 $x>1$ 时,$g(x)<0$,不合题意.

当 $a>0$ 时,令 $g'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{a}$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;

当 $x>\frac{1}{a}$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增.

若 $0<a<1$,则 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,$g\left(\frac{1}{a}\right)<g(1)=0$;

若 $a>1$,则 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递增,$g\left(\frac{1}{a}\right)<g(1)=0$;

若 $a=1$,则 $[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=g(1)=0$,$g(x)\geqslant 0$.

综上,$a=1$.

(2)**证明**:由(1)知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$,$f'(x)=2x-2-\ln x$,$x>0$.

令 $h(x)=2x-2-\ln x$,则 $h'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$,$x>0$.

令 $h'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.

所以 $[h(x)]_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=1-2+\ln 2=-1+\ln 2<0$.

因为 $h(e^{-2})=2e^{-2}>0$,$h(2)=2-\ln 2>0$,$e^{-2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$2\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,

所以在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上,$h(x)$ 即 $f'(x)$ 各有一个零点.

设 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上的零点分别为 x_0,x_2,

因为 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,

所以当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x_0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

因此 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

因为 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

所以当 $\frac{1}{2}<x<x_2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x>x_2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

因此 x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

所以 $f(x)$ 有唯一的极大值点 x_0.

由前面的证明可知,$x_0\in\left(e^{-2},\frac{1}{2}\right)$,则 $f(x_0)>f(e^{-2})=e^{-4}+e^{-2}>e^{-2}$.

因为 $f'(x_0)=2x_0-2-\ln x_0=0$,

所以 $\ln x_0=2x_0-2$.

又 $f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0(2x_0-2)=x_0-x_0^2$,

因为 $0<x_0<\frac{1}{2}$,所以 $f(x_0)<\frac{1}{4}=2^{-2}$.

因此,$e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

第 9 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.A 4.C 5.B

6.A 7.B 8.B

9.B

提示:设 $z_1=a+bi$,$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,则 $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)=(2ac+2bd)\in\mathbf{R}$.

10.C

提示:设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知,得 $x^2+y^2+i(2yi)\leqslant 0$,

即 $x^2+y^2-2y\leqslant 0$,即 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$.

故选 C.

11.C

提示:$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^3=-1$,$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^6=1$,所以原式 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\overline{z}$.

12.A

提示:设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

所以 $|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$,$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

所以 $\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

整理得:$a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$,

所以 z 对应的点的轨迹是圆.

故选 A.

二、填空题

13.1

14.5,2

15.1

提示:复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为 $(1,1)$,B 的坐标为 $(-1,1)$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$.

16.-1

提示:因为 $x+\frac{1}{x}=-1$,所以 $x^2+x+1=0$.

所以 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,所以 $x^3=1$.

因为 $2017=3\times 672+1$,所以 $x^{2017}=x$,

所以 $x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解**:(1)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}=\frac{2\sqrt{2}\cdot 2i\cdot 2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}=\frac{-8\sqrt{2}\times 41i}{41\times 2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**:(1)要使复数 z 对应点在 x 轴下方,则 $m^2-2m-15<0$,解得 $-3<m<5$.

(2)要使复数 z 对应点在第四象限,则 $\begin{cases}m^2+5m+6>0,\\m^2-2m-15<0,\end{cases}$ 解得 $-2<m<5$.

(3)要使复数 z 对应点在直线 $x+y+4=0$ 上,则 $(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)+4=0$,解得 $m=1$,或 $m=-\frac{5}{2}$.

19.**解**:(1)因为 $z=\cos A+i\sin A$,所以 $z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以 $|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2 A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为 $|z+1|=1$.所以 $2+2\cos A=1$.所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.又 $0<A<180°$,所以 $A=120°$.

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理,得 $a=2R\cdot\sin A$,$b=2R\cdot\sin B$,$c=2R\cdot\sin C$(其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径),

所以原式 $=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为 $B=180°-A-C=60°-C$,

所以原式 $=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin 120°\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$,

即 $\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}$ 的值为 2.

20.**解**:因为 $(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2^4}=-8$,

所以 $\left(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$,

所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\overline{\omega}\left(其中\ \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\overline{\omega}=1+\sqrt{3}i$,则 $x=1$.

综上可知,存在满足题意的实数 x 且 $x=1$.

21.**解**:依题意得 z_1+z_2 为实数,因为 $z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$,

所以 $\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq 0,\\1-a\neq 0.\end{cases}$ 所以 $a=3$.

此时 $z_1=\frac{3}{8}-i$,$z_2=-1+i$,

即 $\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times 1=-\frac{11}{8}$.

22.**解**:由题意,得 $z_1=\frac{-1+5i}{1+i}=2+3i$,

于是 $|z_1-\overline{z_2}|=|4-a+2i|=\sqrt{(4-a)^2+4}$,$|z_1|=\sqrt{13}$.

由 $\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$,

得 $a^2-8a+7<0$,解得 $1<a<7$.

所以实数 a 的取值范围是 $(1,7)$.

第 10 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A

2.B

提示:因为 $z^2=(\cos\theta-i\sin\theta)^2=\cos 2\theta-i\sin 2\theta$,又 $z^2=-1$,所以 $\begin{cases}\cos 2\theta=-1,\\\sin 2\theta=0,\end{cases}$ 再由选择项验证得 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

3.A

提示:因为 $(a+i)^2=a^2-1+2ai$,又复数 $(a+i)^2$ 的对应点在 y 轴负半轴上,所以 $\begin{cases}a^2-1=0,\\2a<0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

4.B

提示:由已知,得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\m^2+m=-(1-3m),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\pm 1,\\m=1,\end{cases}$ 所以 $m=1$.

5.A

提示:由 $\frac{1-i}{1+i}=-i$,得 $\overrightarrow{OA}=(0,-1)$,$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以 $|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OB}|=2$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

所以 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

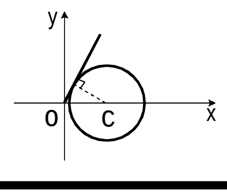
又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.A

7.C

8.D

提示:因为 $|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$,所以 $(x-2)^2+y^2=3$,所以点 (x,y) 在以 $C(2,0)$ 为圆心,以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上,如图,由平面几何知识知 $-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



③

9.C

提示：$\frac{a}{b}=\frac{3+2i}{4+xi}=\frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2}=\frac{12+2x}{16+x^2}+\frac{8-3x}{16+x^2}\cdot i\in\mathbf{R}$,

所以$\frac{8-3x}{16+x^2}=0$,所以$x=\frac{8}{3}$.

10.B

提示：$z*\bar{z}=\frac{|z|+|\bar{z}|}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$，又因为$ab\le(\frac{a+b}{2})^2=\frac{9}{4}$,所以$-ab\ge-\frac{9}{4}$,$z*\bar{z}\ge\sqrt{9-2\times\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

11.A

提示：设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则$\bar{z}\cdot i=(x-yi)\cdot i=y+xi=-1+2i$,所以$y=-1,x=2$,故$z=2-i$.故选A.

12.D

提示：由条件知$A=\{-2,-1,0,1,2\}$,

若$z\in\mathbf{R}$,则$a^2-a-2=0$,所以$a=-1$或2,所以$p_1=\frac{2}{5}$；

若$z=0$，则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$所以$a=-1$,所以$p_3=\frac{1}{5}$；

若z为虚数,则$a^2-a-2\ne0$,所以$a\ne-1$且$a\ne2$,所以$p_2=\frac{3}{5}$；

若z为纯虚数,则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\ne0,\end{cases}$所以$a=1$,所以$p_4=\frac{1}{5}$.

所以$p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.5

提示：复数3-5i,1-i和-2+ai在复平面内对应的点分别为(3,-5),(1,-1),(-2,a)，所以由三点共线的条件可得$\frac{-1-(-5)}{1-3}=\frac{a-(-1)}{-2-1}$,解得$a=5$.

14.$\frac{9}{2}$

提示：把$x=1+2i$代入$x^2-mx+2n=0$中,得$(1+2i)^2-m(1+2i)+2n=0$,即$1-4+4i-m-2mi+2n=0$,所以$(2n-m-3)+(4-2m)i=0$,

根据复数相等的充要条件,

得$\begin{cases}-3-m+2n=0,\\4-2m=0,\end{cases}$即$\begin{cases}n=\frac{5}{2},\\m=2,\end{cases}$

所以$m+n=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$.

15.0

提示：设$z=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$,

则$\bar{z}=m-ni$.

所以$b=z\cdot\bar{z}=m^2+n^2$,

$a=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}=\frac{4mni}{2i}=2mn$.

故$a-b=2mn-(m^2+n^2)=-(m-n)^2\le0$,即$a-b$的最大值是0.

16.①②

提示：当z为纯虚数时,z与$\bar{z}$对应的点均在虚轴上,故P_1,O,P_2三点共线,①正确;显然③错误;当$z=0$时,$\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{OP_2}$对应的复数均为0,此时有$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$,故②正确,④错误.

三、解答题

17.解：(1)$\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=\frac{-3+i}{-i}=-1-3i$.

(2)$\frac{(1+2i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{-3+4i+3-3i}{2+i}=\frac{i}{2+i}=\frac{i(2-i)}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

18.解：设原方程的一个实根为$t=t_0$,则有$(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0,①\\t_0+x-y=0,②\end{cases}$

把②代入①中消去t_0,得$(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$,

即$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.解：(1)因为$z\in\mathbf{R}$,所以$m^2+2m-3=0$且$m-1\ne0$,解得$m=-3$.

(2)因为z是纯虚数,

所以$\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}=0,\\m^2+2m-3\ne0,\end{cases}$

解得$m=0$,或$m=-2$.

(3)因为z对应的点位于复平面第二象限,所以$\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}<0,\\m^2+2m-3>0,\end{cases}$

解得$m<-3$.

所以$m\in(-\infty,-3)$.

(4)因为z对应的点在直线$x+y+3=0$上,所以$\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)+3=0$,

解得$m=0$,或$m=-2$.

20.解：因为$4(a+bi)+2(a-bi)=3\sqrt{3}+i$,

所以$6a+2bi=3\sqrt{3}+i$,

所以$\begin{cases}6a=3\sqrt{3},\\2b=1,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

所以$z-\omega=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)-(\sin\theta-i\cos\theta)=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta)+(\frac{1}{2}+\cos\theta)i$,

所以$|z-\omega|$

$=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta)^2+(\frac{1}{2}+\cos\theta)^2}$

$=\sqrt{2-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sqrt{2-2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta)}$

$=\sqrt{2-2\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}$,

因为$-1\le\sin(\theta-\frac{\pi}{6})\le1$,所以$0\le2-2\sin(\theta-\frac{\pi}{6})\le4$,

所以$0\le|z-\omega|\le2$，故所求得$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,$|z-\omega|$的取值范围是$[0,2]$.

21.解：因为$z=\frac{(-1+3i)(1-i)-(1+3i)}{i}=\frac{1+i}{i}=1-i$,所以$|z|=\sqrt{2}$.又$|\frac{\omega}{z}|=\frac{|\omega|}{|z|}\le\sqrt{2}$,所以$|\omega|\le2$.

而$\omega=z+ai=(1-i)+ai=1+(a-1)i,a\in\mathbf{R}$,

则$\sqrt{1^2+(a-1)^2}\le2\Rightarrow(a-1)^2\le3$,

所以$-\sqrt{3}\le a-1\le\sqrt{3}$,$1-\sqrt{3}\le a\le1+\sqrt{3}$.

即a的取值范围为$[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

22.(1)解：设$z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$且$b\ne0)$,则$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=(a+\frac{a}{a^2+b^2})+(b-\frac{b}{a^2+b^2})i$.

因为z_2是实数,$b\ne0$,于是有$a^2+b^2=1$,即$|z_1|=1$,还可得$z_2=2a$.

由$-1\le z_2\le1$,得$-1\le2a\le1$,解得$-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$,即$z_1$的实部的取值范围是$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(2)证明：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}$

$=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}$

$=-\frac{b}{a+1}i$.

因为$a\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,$b\ne0$,所以$\omega$为纯虚数.

第11期

第2,3版 综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.A

4.B

提示：因为$x=3+4i$,所以$|x|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,所以$z=3+4i-5-(1-i)=(3-5-1)+(4+1)i=-3+5i$.所以复数$z$在复平面内的对应点在第二象限,故选B.

5.B

提示：平面区域M的面积为πr^2,由类比知识可知:平面区域M绕y轴旋转一周得到的旋转体类似于为实心的车轮内胎,旋转体的体积等于以圆(面积为πr^2)为底,以O为圆心、d为半径的圆的周长$2\pi d$为高的圆柱的体积,所以旋转体的体积$V=\pi r^2\times2\pi d=2\pi^2r^2d$.

6.A

7.B

提示：对于A,$f'(x)=-3x^2\le0$恒成立,在$\mathbf{R}$上单调递减,没有极值点;对于B,$f'(x)=\sin x$,当$x\in(-\pi,0)$时,$f'(x)<0$,当$x\in(0,\pi)$时,$f'(x)>0$,故$f(x)=-\cos x$在$x=0$的左侧区间$(-\pi,0)$内单调递减,在其右侧区间$(0,\pi)$内单调递增,所以$x=0$是$f(x)$的一个极小值点;对于C,$f'(x)=\cos x-1\le0$恒成立,在$\mathbf{R}$上单调递

减,没有极值点;对于D,$f(x)=\frac{1}{x}$在$x=0$处没有定义,所以$x=0$不可能成为极值点.综上可知,选B.

8.D

9.A

提示：分别将$2+ai$,$b+i$代入方程得：$\begin{cases}(2+ai)^2+p(2+ai)+q=0,①\\(b+i)^2+p(b+i)+q=0,②\end{cases}$

对①②整理,由复数相等的充要条件得：$\begin{cases}2p+q-a^2+4=0,\\(p+4)a=0,\\pb+q+b^2-1=0,\\p+2b=0.\end{cases}$

解得$p=-4,q=5$.

10.B

11.D

提示：因为$\frac{2-i}{a+i}=\frac{(2-i)(a-i)}{(a+i)(a-i)}=\frac{2a-1-(a+2)i}{a^2+1}$是纯虚数,所以$2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$,所以$|z|=|2a+1+\sqrt{2}i|=|2+\sqrt{2}i|=\sqrt{6}$,故选D.

12.A

提示：令$g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$,则$g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$.因为$2f(x)<xf'(x)$,所以$g'(x)>0$,所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$g(a)<g(b)$,即$\frac{f(a)}{a^2}<\frac{f(b)}{b^2}$,所以$b^2f(a)<a^2f(b)$.令$h(x)=\frac{f(x)}{x^3}$,则$h'(x)=\frac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}$.因为$xf'(x)<3f(x)$,所以$h'(x)<0$,所以函数$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$h(a)>h(b)$,即$\frac{f(a)}{a^3}>\frac{f(b)}{b^3}$,所以$b^3f(a)>a^3f(b)$.故选A.

二、填空题

13.$S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$

14.3

提示：由$(1+i)^{2n}=-2^n\cdot i$,得$(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n\cdot i$,所以$i^n=-i$,即$n=4k+3,k\in\mathbf{N}$,所以最小的正整数为3.

15.$a>4$

提示：因为$f(x)=(1-\frac{a}{x})e^x(x>0)$,

所以$f'(x)=(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1)e^x$.因为函数$f(x)$既有极大值又有极小值,所以$f'(x)=(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1)e^x=0$有2个不等实数根,所以$x^2-ax+a=0$有2个不等的正实数根,所以$\Delta=a^2-4a>0$且$a>0$,所以$a>4$.

16.-3

提示：由题意可知,$f'(x)=3x^2+2ax+b$,$f'(0)=0$,所以$b=0$,所以$f(x)=x^2(x+a)$,有$\frac{27}{4}=\int_0^{-a}[0-(x^3+ax^2)]dx=-(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3})\Big|_0^{-a}=\frac{a^4}{12}$,所以$a=\pm3$.又$-a>0\Rightarrow a<0$,得$a=-3$.

三、解答题

17.解：(1)原式

$=(2+\frac{i}{i^{16}})-\frac{(1+i)^{22}}{(\sqrt{2})^{22}}$

$=(2+i)-\frac{(2i)^{11}}{2^{11}}=2+i-i^{11}$

$=2+i+i=2+2i$.

(2)原式$=\{[1-(-i)^5]^2+i^{10}\}(1+2i)$

$=(2i-1)(2i+1)=4i^2-1=-5$.

18.证明：$2\cos\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

$2\cos\frac{\pi}{8}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$

$=2\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$2\cos\frac{\pi}{16}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}$

$=2\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

…

归纳一般性的结论：

$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{n个2}$.

19.解：由$z=1+i$,可知$\bar{z}=1-i$,代入$az+2b\bar{z}=(a+2z)^2$,得$a(1+i)+2b(1-i)=[a+2(1+i)]^2$,即$a+2b+(a-2b)i=(a+2)^2-4+4(a+2)i$.

所以$\begin{cases}a+2b=(a+2)^2-4,\\a-2b=4(a+2),\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-4,\\b=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$

20.证明：已知$a>b>c$,因为$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\ge2+2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=4$,

所以$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\ge4$,

即$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\ge\frac{4}{a-c}$.

21.解：设该容器底面的一边长为xm,则另一边长为$(x+0.5)$m,此容器的高为$h=\frac{14.8}{4}-x-(x+0.5)=3.2-2x(0<x<1.6)$.

于是,此容器的容积为$V(x)=x(x+0.5)(3.2-2x)=-2x^3+2.2x^2+1.6x$,其中$0<x<1.6$.

由$V'(x)=-6x^2+4.4x+1.6=0$,得$x=1$或$x=-\frac{4}{15}$(舍去).

因为$V(x)$在$(0,1.6)$内只有一个极值点,且$x\in(0,1)$时,$V'(x)>0$,函数$V(x)$单调递增;$x\in(1,1.6)$时,$V'(x)<0$,函数$V(x)$单调递减.

所以,当$x=1$时,函数$V(x)$有最大值$V(1)=1\times(1+0.5)\times(3.2-2\times1)=1.8(m^3)$,$h=3.2-2=1.2$(m).

即当高为1.2m时,长方体容器的容积最大,最大容积为$1.8m^3$.

22.解：(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$.

(ⅰ)若$a\le0$,则$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减.

(ⅱ)若$a>0$,则由$f'(x)=0$,得$x=-\ln a$.

当$x\in(-\infty,-\ln a)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(-\ln a,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$单调递减,在$(-\ln a,+\infty)$单调递增.

(2)(ⅰ)若$a\le0$,由(1)知,$f(x)$至多有一个零点.

(ⅱ)若$a>0$,由(1)知,当$x=-\ln a$时,$f(x)$取得最小值,最小值为$f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}+\ln a$.

①当$a=1$时,由于$f(-\ln a)=0$,故$f(x)$只有一个零点;

②当$a\in(1,+\infty)$时,$1-\frac{1}{a}+\ln a>0$,即$f(-\ln a)>0$,故$f(x)$没有零点;

③当$a\in(0,1)$时,$1-\frac{1}{a}+\ln a<0$,即$f(-\ln a)<0$.

又$f(-2)=ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>-2e^{-2}+2>0$,故$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$有一个零点.

设正整数n_0满足$n_0>\ln(\frac{3}{a}-1)$,则$f(n_0)=e^{n_0}(ae^{n_0}+a-2)-n_0>e^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$.

由于$\ln(\frac{3}{a}-1)>-\ln a$,因此$f(x)$在$(-\ln a,+\infty)$有一个零点.

综上,a的取值范围为$(0,1)$.

第12期

第2,3版 综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.B

2.D

3.D

提示：由归纳推理可知,第k项的第一个数为a^{k-1},且共有k项.故选D.

4.A

5.A

提示：依题意$3-4i=\lambda(-1+2i)+\mu(1-i)=\mu-\lambda+(2\lambda-\mu)i$,

所以$\begin{cases}\mu-\lambda=3,\\2\lambda-\mu=-4,\end{cases}$所以$\begin{cases}\lambda=-1,\\\mu=2.\end{cases}$

所以$\lambda+\mu=1$.

6.B

7.D

提示：②中$|z|^2\in\mathbf{R}$,但z^2不一定是实数.③中复数集不能比较大小,不能用b^2-4ac来确定根的个数.

8.B

9.B

提示：若存在实数m,使直线l是曲线$y=f(x)$的切线,因为$f'(x)=2\sin x\cos x+$