答案页第 1 期

数学·北师大(必修 4)

第 1 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

提示:逆时针旋转是正角,顺时针旋转是负角,故$\angle AOC=120°-270°=-150°$.

2.A 3.D 4.D 5.A 6.B

7.D

提示:原式$=\sin(1080°+60°)\cos(-720°+45°)-\sin(-360°-60°)\cos(-720°+150°)$

$=\sin60°\cos45°-\sin(-60°)\cos150°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}-3}{4}$.

8.B

提示:$f\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{15\pi}{4}+3\times\frac{3\pi}{2}\right)$

$=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

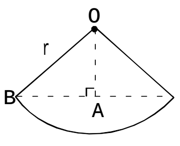
9.D

10.B

提示:在如图所示$\triangle OAB$中,

$\sin1=\frac{AB}{OB}=\frac{\frac{1}{2}\times2}{r}$,所以$r=\frac{1}{\sin1}$.

又圆心角$\alpha=2$,所以$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{\sin^21}$.

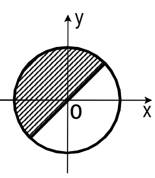


(第 10 题图)

11.C

12.C

提示:如图,在单位圆上作出一、三象限的角平分线,由单位圆与正、余弦函数值之间的关系知,应选 C.



(第 12 题图)

二、填空题

13.二

提示:因为 3rad≈57.30°×3=171.9°,所以 3 弧度的角的终边在第二象限.

14.$\left\{\alpha\left|k\pi\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\right.\right\}$

15.五

提示:158=7×22+4,故 158 天后是星期五.

16.12;2π

提示:设从点$P(2017,0)$出发,t 秒后第三次相遇,则它们走过的弧度之和为6π(三个圆周).于是有$\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}t=6\pi$,解得 t=12(秒),此时点$M$走了$\frac{\pi}{6}\times12=2\pi$(弧度).

三、解答题

17.**解:**(1)与α终边相同的角的集合为$\left\{\theta\left|\theta=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\right.\right\}$.

(2)令$-4\pi<2k\pi+\frac{\pi}{3}<2\pi$,

解得$-2-\frac{1}{6}<k<1-\frac{1}{6}$.

又$k\in\mathbf{Z}$,所以$k=-2,-1,0$.

故在$(-4\pi,2\pi)$内与α终边相同的角有$-\frac{11\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3}$.

(3)由(1)有$\beta=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

则$\frac{\beta}{2}=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

当k为偶数时,$\frac{\beta}{2}$的终边在第一象限;

当k为奇数时,$\frac{\beta}{2}$的终边在第三象限.

所以$\frac{\beta}{2}$是第一、三象限角.

18.**解:**设扇形的圆心角为α,半径为 r,弧长为 l,面积为 S.

因为$2r+l=10$,所以$l=10-2r$.

由$r>0,10-2r>0$,得$0<r<5$,

则$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(10-2r)r=-r^2+5r$

$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}(0<r<5)$.

所以当$r=\frac{5}{2}$时,扇形的面积最大,

此时$S=\frac{25}{4}$,$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{10-2r}{r}=2$.

故当扇形的半径为$\frac{5}{2}$cm,圆心角为 2rad 时,扇形的面积最大,最大面积是$\frac{25}{4}\text{cm}^2$.

19.**解:**$\cos(105°-\alpha)$

$=\cos[180°-(75°+\alpha)]$

$=-\cos(75°+\alpha)=-\frac{1}{3}$,

$\sin(\alpha-195°)=\sin(\alpha-15°-180°)$

$=-\sin(\alpha-15°)=-\cos[90°-(\alpha-15°)]$

$=-\cos(105°-\alpha)=\frac{1}{3}$.

所以$\cos(105°-\alpha)+\sin(\alpha-195°)$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$.

20.**解:**(1)由$\frac{1}{|\sin\alpha|}=-\frac{1}{\sin\alpha}$,可知$\sin\alpha<0$,

所以α是第三或第四象限角或终边在y轴的负半轴上的角.

由$\lg(\cos\alpha)$有意义,可知$\cos\alpha>0$,

所以α是第一或第四象限角或终边在x轴的正半轴上的角.

综上可知角α的终边在第四象限.

(2)因为$|OM|=1$,

所以$\left(\frac{3}{5}\right)^2+m^2=1$,解得$m=\pm\frac{4}{5}$.

又α是第四象限角,故$m<0$,

从而$m=-\frac{4}{5}$.

由正弦函数的定义,

可知$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{m}{|OM|}=-\frac{4}{5}$.

21.**解:**由题意,得点P每秒转过θ,

则有$\pi+2k\pi<2\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

即$\frac{\pi}{2}+k\pi<\theta<\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又$0<\theta<\pi$,所以$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$.

又$14\theta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$\theta=\frac{k\pi}{7},k\in\mathbf{Z}$.

故$\frac{\pi}{2}<\frac{k\pi}{7}<\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,

解得$3.5<k<5.25,k\in\mathbf{Z}$,

所以$k=4$或 5.

所以$\theta=\frac{4\pi}{7}$或$\frac{5\pi}{7}$.

22.**解:**由已知条件得

$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$, ①

$\sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta$. ②

由①²+②²,得$\sin^2\alpha+3(1-\sin^2\alpha)=2$,

故$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

利用单位圆,得$\alpha=\frac{\pi}{4}$或$-\frac{\pi}{4}$.

将$\alpha=\frac{\pi}{4}$代入②,得$\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\beta\in(0,\pi)$,所以$\beta=\frac{\pi}{6}$,

代入①,可知符合.

同理,将$\alpha=-\frac{\pi}{4}$代入②,得$\beta=\frac{\pi}{6}$,

代入①,可知不符合.

综上,存在$\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{6}$.

数学·北师大(必修4)
第2期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.C 3.C

4.B

提示：函数 $y=-2\sin x+1$ 的单调递增区间即 $y=\sin x$ 的单调递减区间，故选B.

5.A

6.B

提示：由于函数 $y=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right)$ 和 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，且当 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$y=-1$；当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y=1$，故该函数的值域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

7.D

提示：$1\text{rad}\approx57.30°$，$\frac{1}{2}\text{rad}\approx28.65°$，则 $0<\frac{1}{2}<30°<1$.

又 $y=\cos x$ 在 $(0°,180°)$ 上是减函数，所以 $\cos0>\cos\frac{1}{2}>\cos30°>\cos1$.

8.D

提示：当 $x=0$ 时，$y=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}>0$，排除C；当 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ 时，得 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $x=\frac{5\pi}{12}$ 或 $-\frac{\pi}{12}$，排除A、B，故选D.

9.D

提示：最小正周期为 π 的函数是选项A、B、D中的函数.图像关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，对正弦、余弦函数必须使在 $x=\frac{\pi}{6}$ 时函数值为0，对正切函数必须是函数值为0或无意义的点，检验知选D.

10.B

提示：对 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ 成立等价于 $f(x_1)$ 为 $f(x)$ 的最小值，且 $f(x_2)$ 为 $f(x)$ 的最大值，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值就是 $\frac{1}{2}$ 个周期.由于周期 $T=4$，故 $|x_1-x_2|$ 的最小值是 $\frac{T}{2}=2$.

11.B

提示：由题意得 $\sin x=\tan x$，即 $\cos x\tan x=\tan x$，$\tan x(\cos x-1)=0$，所以 $\tan x=0$，或 $\cos x=1$，即 $x=-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi$.故选B.

12.B

提示：$49\frac{1}{4}T\leqslant1$，

即 $\frac{197}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}\leqslant1$，

所以 $\omega\geqslant\frac{197\pi}{2}$.

二、填空题

13.$x=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$

提示：令 $x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得函数 y 的图像的对称轴方程为 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

14.$2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

15.$\left(0,\frac{\pi}{12}\right]$

提示：由题意，得 $2a+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，

解得 $0<a\leqslant\frac{\pi}{12}$.

16.④

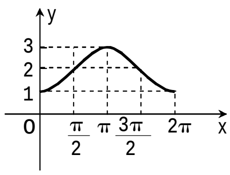
提示：①正切曲线的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；②$y=|\sin x|$，$y=|\tan x|$ 的周期都是 π；③正弦函数在定义域R上不是单调函数；④$f\left(-\frac{T}{2}\right)=f\left(-\frac{T}{2}+T\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)=-f\left(-\frac{T}{2}\right)$，得 $f\left(-\frac{T}{2}\right)=0$.

三、解答题

17.**解**：(1)列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	2	3	2	1

(2)描点、连线，得图像如下图.



(第17题图)

由图可得，当 $x=2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数 y 取得最大值，且最大值为3.

18.**解**：(1)由题意，得

$$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ 1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq0,\end{cases}$$

故函数的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2}\text{且}x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

(2)由题意，得 $-1<\tan2x\leqslant\sqrt{3}$，

所以 $k\pi-\frac{\pi}{4}<2x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故函数的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

19.**解**：(1)由 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，知角 α 终边上必有一点 $(x,3)$，且 $x<0$，$r=\sqrt{x^2+3^2}=5$，解得 $x=-4$.

所以 $\tan\alpha=\frac{3}{x}=-\frac{3}{4}$.

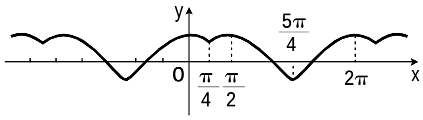
(2)原式 $=\dfrac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)\left[-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\alpha}$

$=-\cos\alpha$.

由(1)知 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{4}{5}$，

所以原式 $=\frac{4}{5}$.

20.**解**：(1)函数 $f(x)$ 的图像如下图所示，它是在同一平面直角坐标系中画出正弦、余弦函数图像后，取在上方的图像.



(第20题图)

单调递增区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+2\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，

单调递减区间为 $\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ 和 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$，

$[f(x)]_{max}=1$，$[f(x)]_{min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)$f(x)$ 为周期函数，最小正周期 $T=2\pi$.

21.**解**：(1)最小正周期 $T=\pi$.

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$，得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$.

所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ 时，

$f(x)$ 取得最小值为 a；

当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ 时，

$f(x)$ 取得最大值为 $a+3$.

由已知条件，得 $a+3+a=3$，解得 $a=0$.

(2)由(1)可得 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由 $f(x)\geqslant2$，得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$.

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以不等式 $f(x)\geqslant2$ 的解集为

$$\left\{x\,\middle|\,k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

22.**解**：(1)因为 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，所以 $f\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，故当 $x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$f(x)=-\sin x$.

故 $f(x)=\begin{cases}-\sin x,x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right),\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right].\end{cases}$

(2)因为 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上，有 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 或 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $x_1=0$，$x_2=\frac{\pi}{3}$.

又 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，

所以 $x_3=-\frac{\pi}{3}$，$x_4=-\frac{2\pi}{3}$ 也是方程的解.

所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解为 $x=-\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$，0，$\frac{\pi}{3}$.

数学·北师大(必修4)
第3期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1~6.CBCDAA

7~12.CBDDBA

二、填空题

13.$\frac{\pi}{3}$

14.80

15.$y=\frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{5}t+\frac{19}{5}$

16.-1

提示:因为在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上,$1+\sin x>0$和$1-\sin x>0$恒成立,

所以原函数可化为

$y=\log_2(1-\sin^2x)=\log_2(\cos^2x)$.

因为在$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上,

$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos x\leqslant1$,

所以$\log_2\frac{1}{2}\leqslant\log_2(\cos^2x)\leqslant\log_2 1$,

即$-1\leqslant y\leqslant0$.

所以,在$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上,

$y_{max}=0$,即$a=0$;$y_{min}=-1$,即$b=-1$.

所以$a+b=-1$.

三、解答题

17.解:$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)=-\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)令$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

得该函数图像的对称轴为$x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,即$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)原函数的单调递增区间即为函数$y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$的单调递减区间.

令$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得$4k\pi+\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant4k\pi+\frac{11\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.

故原函数的单调递增区间为

$\left[4k\pi+\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{11\pi}{3}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

18.解:由$2x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$,$k\in Z$.

所以函数的定义域为

$\left\{x\middle|x\in R\text{ 且 }x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12},k\in Z\right\}$,

最小正周期$T=\frac{\pi}{2}$.

由$k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$,$k\in Z$.

所以函数的单调递增区间是

$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)$,$k\in Z$.

19.解:(1)由$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得$\omega=2$.

由最小值是-3,得$A=3$.

由$f(0)=\frac{3}{2}$,得$\sin\varphi=\frac{1}{2}$.

又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故解析式为$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)把$f(x)$的图像上所有点向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到$y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=3\sin2x$的图像;再把所得图像上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{3}$倍,即可得到$y=\sin4x$的图像.

20.解:(1)从图中可以看出,$A=300$.

又因为$\frac{1}{2}T=\frac{1}{180}-\left(-\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{150}$,

所以$T=\frac{1}{75}$,得$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{75}$,

所以$\omega=150\pi$.

将五点中第一点的$t=-\frac{1}{900}$代入$\omega t+\varphi$,有$150\pi\times\left(-\frac{1}{900}\right)+\varphi=0$,解得$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

综上可知,函数解析式为

$I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由题意,可知$T\leqslant\frac{1}{150}$,

所以$\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}$,

所以$\omega\geqslant300\pi\approx942.5$.

所以ω的最小正整数值为943.

21.解:(1)由$f(x)$为偶函数,

可得$\alpha-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in Z$,

所以$\alpha=k\pi+\frac{2\pi}{3}$,$k\in Z$.

又$0<\alpha<\pi$,所以$\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

因为$y=f(x)$图像的两相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$,

所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$,得$\omega=2$.

所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos2x$.

所以$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2)向右平移后所得函数解析式为

$y=2\cos2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

则$g(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令$2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\pi$,$k\in Z$,

解得$4k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant4k\pi+\frac{8\pi}{3}$,$k\in Z$.

故$g(x)$的单调递减区间为

$\left[4k\pi+\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right]$,$k\in Z$.

22.解:(1)由规律(a)(b),

得$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times(8-2)$,所以$\omega=\frac{\pi}{6}$.

由规律(b)(c),得$\begin{cases}-A+b=100,\\A+b=500,\end{cases}$

解得$A=200$,$b=300$.

又2月份的游客人数最少,

所以$\sin\left(\frac{\pi}{6}\times2+\varphi\right)=-1$,

得$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$,$k\in Z$.

所以$\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$,$k\in Z$.

结合$0<|\varphi|<\pi$,得$\varphi=-\frac{5\pi}{6}$.

所以$y=200\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)+300$.

(2)由$200\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)+300\geqslant400$,

得$\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$.

所以$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in Z$.

所以$12k+6\leqslant x\leqslant12k+10$,$k\in Z$.

又$x\in\mathbf{N}_+$,$1\leqslant x\leqslant12$,

故$x=6,7,8,9,10$.

因此应该在6,7,8,9,10月份准备不少于400人的用餐.

数学·北师大(必修4)
第4期
第2~3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B　2.D　3.D

4.D

提示：令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，即对称中心为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故选 D.

5.B

6.B

提示：$f(x)=3\cos\left(\frac{15\pi}{2}-\frac{2}{3}x\right)=3\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{2}{3}x\right)=-3\sin\frac{2}{3}x$，显然 $f(x)$ 是奇函数.

7.B

8.A

提示：平移后函数的解析式为 $y=\sin(2x-2\varphi)$，其图像关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，所以 $2\times\frac{\pi}{6}-2\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，所以当 $k=-1$ 时，φ 的最小值为 $\frac{5\pi}{12}$.

9.A

提示：由点 $A\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，得 $\angle AOx=\frac{\pi}{3}$. 结合图形可知，若蚂蚁爬行的路程最短，则必沿顺时针方向爬行，此时 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，故 $\overset{\frown}{AB}=1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.故选 A.

10.A

提示：由题意可知，当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，

$y_{max}=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，

所以 $-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\omega=-\frac{1}{2}-3k(k\in\mathbf{Z})$.

又 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，

所以 $\omega<0$，且 $T=\frac{\pi}{|\omega|}\geqslant\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，

得 $-\frac{3}{2}\leqslant\omega<0$.

所以 $-\frac{3}{2}\leqslant-\frac{1}{2}-3k<0$，解得 $-\frac{1}{6}<k\leqslant\frac{1}{3}$.

又 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=0$.所以 $\omega=-\frac{1}{2}$.

11.A

12.C

提示：$R=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(-3)^2}=6$，

$T=60=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{30}$，

$f(0)=-3\Rightarrow6\sin\varphi=-3\Rightarrow\sin\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

故 A 正确.

$y=f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)$.

当 $t\in[35,55]$ 时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in\left[\pi,\frac{5\pi}{3}\right]$，

则 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,0]$，所以点 P 到 x 轴的距离的最大值为 6，B 正确.

当 $t\in[10,25]$ 时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，函数 $y=f(t)$ 不是单调函数，C 错误.

当 $t=20$ 时，$y=6$，则 $P(0,6)$，

故 $|PA|=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(-3-6)^2}=6\sqrt{3}$，D 正确.故选 C.

二、填空题

13. $\left\{-\frac{19\pi}{6},-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{17\pi}{6}\right\}$

14. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

15. $\frac{1}{2}$，1 或 $\frac{1}{2}$，-1

提示：若 $b>0$，则 $a+b=\frac{3}{2}$，且 $a-b=-\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$；若 $b<0$，则 $a-b=\frac{3}{2}$，且 $a+b=-\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$.

16.2

提示：①③正确.

三、解答题

17.解：因为 $\sin\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，

所以原式 $=\frac{\cos\alpha(-\sin\alpha)\tan^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\tan^2\alpha$.

18.解：(1)因为角 θ 的终边在直线 $y=\sqrt{2}x$ 上，所以其终边在第一或第三象限.

若终边在第一象限，则其必过点 $P(1,\sqrt{2})$，

此时 $x=1$，$y=\sqrt{2}$，$r=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

若终边在第三象限，

则其必过点 $Q(-1,-\sqrt{2})$，

此时 $x=-1$，$y=-\sqrt{2}$，$r=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上，$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)由已知，得 $\tan\theta=\frac{y}{x}=\sqrt{2}$.

所以原式 $=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$=-3-2\sqrt{2}$.

19.解：(1)最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$.

(2)令 $\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $x\neq2k+\frac{1}{3}$，$k\in Z$.

令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $2k-\frac{5}{3}<x<2k+\frac{1}{3}$，$k\in Z$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq2k+\frac{1}{3},k\in Z\right\}$，

单调递增区间为 $\left(2k-\frac{5}{3},2k+\frac{1}{3}\right)$，$k\in Z$.

(3)由 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，

得 $\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，

解得 $x=2k$，$k\in Z$.

故原方程的解集为 $\{x|x=2k,k\in Z\}$.

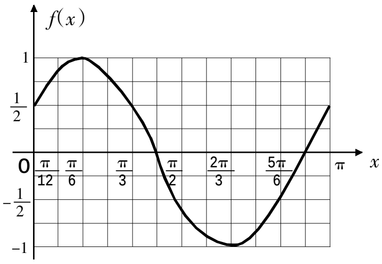
20.解：(1)由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$.

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，按五个关键点列表：

$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
y	1	0	-1	0	1

又 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f(\pi)=\frac{1}{2}$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内的图像如图所示.



（第20题图）

由图可知，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in Z$.

(3)令 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

解得 $k\pi+\frac{\pi}{24}<x<k\pi+\frac{7\pi}{24}$，$k\in Z$.

所以 x 的取值范围为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{24},k\pi+\frac{7\pi}{24}\right)$，$k\in Z$.

21.解：(1)由题意，得 y 的最大值为 14，最小值为 -2，

故 $A+b=14$，$-A+b=-2$.解得 $A=8$，$b=6$.

因为周期 $T=24$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

又最高温度出现在 14 时，

则 $\frac{\pi}{12}\times14+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$.

结合 $|\varphi|<\pi$，可得 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$.

所以所求解析式为 $y=8\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)+6$.

(2)当 t=9 时，

$y=8\sin\left(\frac{\pi}{12}\times9-\frac{2\pi}{3}\right)+6=8\sin\frac{\pi}{12}+6$.

因为 $\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{6}$，

所以 $y=8\sin\frac{\pi}{12}+6<8\sin\frac{\pi}{6}+6=10$.

所以上午 9 时的温度低于 10°C，满足开空调的条件，所以届时学校后勤处需要预防大功率用电带来的副作用.

22.解：(1)由图可知，A=1，$\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=2$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$.

将点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 代入，得 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$.

结合 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)因为 $f(x)$ 的周期为 π，

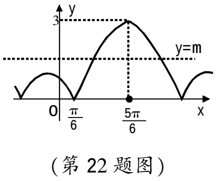
所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 内恰有 2 个周期.

当 $0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，方程 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=a$ 在 $[0,2\pi]$ 内有 4 个实根，设为 x_1,x_2,x_3,x_4，结合图像知 $x_1+x_2=\frac{7\pi}{6}$，$x_3+x_4=\frac{19\pi}{6}$，故所有实数根之和为 $\frac{13\pi}{3}$.

当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，方程 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=a$ 在 $[0,2\pi]$ 内有 5 个实根，为 $0,\frac{\pi}{6},\pi,\frac{7\pi}{6},2\pi$，故所有实数根之和为 $\frac{13\pi}{3}$.

综上，所有实数根之和为 $\frac{13\pi}{3}$.

(3)由条件，得 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$，故 $y=|g(x)|$ 的图像如图所示.要使方程 $|g(kx)|=m$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 上至多有一个解，则需 $y=|g(x)|$ 的图像伸长为原来 5 倍以上，所以 $0<k\leqslant\frac{1}{5}$.故正数 k 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{5}\right]$.



（第22题图）