第8期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.A　4.C

5.A

提示：由题设，得 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

6.A

7.D

提示：由题意，得 $\tan\alpha+\tan\beta=-4\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=5$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{3}$. 因为 $\tan\alpha+\tan\beta<0$，$\tan\alpha\tan\beta>0$，所以 $\tan\alpha<0$，$\tan\beta<0$. 又 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\alpha+\beta\in(-\pi,0)$. 所以 $\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$.

8.A

9.A

提示：由 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$，解得 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{2}{9}$.

因为 θ 是第三象限角，所以 $\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$. 所以 $\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

10.A　11.C

12.D

提示：(1)不妨设 C 为钝角，因为 $\tan A+\tan B=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)=-\tan C(1-\tan A\tan B)$，所以 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C<0$，故(1)错误. (2)若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 $A+B>90°$，$B>90°-A$，所以 $\cos B<\cos(90°-A)=\sin A$，$\sin B>\sin(90°-A)=\cos A$，可得 $\cos A+\cos B<\sin A+\sin B$，故(2)错误. (3)当 $B=\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan B$ 不存在，故(3)错误. (4)在 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan C=\frac{3}{4}$，则 $\sin C=\frac{3}{5}$，$\cos C=\frac{4}{5}$. 又 $\cos B=\frac{\sqrt{21}}{5}>\frac{4}{5}=\cos C$，所以 $B<C<90°$ 且 $\sin B=\frac{2}{5}$. 所以 $\cos A=-\cos(B+C)=-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=-\frac{4\sqrt{21}-6}{25}<0$. 所以 $A>90°$. 所以 $A>C>B$，故(4)正确.

二、填空题

13. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

14. $\frac{\pi}{4}$

15. $-\frac{1}{5}$

提示：由 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{7}{13}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$，

可设 $\sin\alpha\cos\beta=7k$，$\cos\alpha\sin\beta=13k$.

由 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=20k=\frac{2}{3}$，解得 $k=\frac{1}{30}$.

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-6k=-\frac{1}{5}$.

16. -3

提示：过点 P 作 $PQ\perp AD$ 于 Q，

则 $\tan\angle QPD=\tan\angle AED=\frac{AD}{AE}=2$.

又 $\angle APQ=\frac{\pi}{4}$，所以 $\tan\angle APQ=1$. 所以 $\tan\angle APD=\tan(\angle QPD+\angle APQ)=\frac{\tan\angle QPD+\tan\angle APQ}{1-\tan\angle QPD\tan\angle APQ}=-3$.

三、解答题

17.**解**：(1) $\frac{\sin7°+\cos15°\sin8°}{\cos7°-\sin15°\sin8°}$

$=\frac{\sin(15°-8°)+\cos15°\sin8°}{\cos(15°-8°)-\sin15°\sin8°}$

$=\frac{\sin15°\cos8°-\cos15°\sin8°+\cos15°\sin8°}{\cos15°\cos8°+\sin15°\sin8°-\sin15°\sin8°}$

$=\frac{\sin15°\cos8°}{\cos15°\cos8°}=\tan15°=\tan(45°-30°)$

$=\frac{\tan45°-\tan30°}{1+\tan45°\tan30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

(2)原式 $=\frac{\sqrt{1-2\sin(270°+20°)\cos(90°+20°)}}{\sin(270°-20°)+\sin20°}$

$=\frac{\sqrt{1-2(-\cos20°)(-\sin20°)}}{-\cos20°+\sin20°}$

$=\frac{\sqrt{1-2\sin20°\cos20°}}{\sin20°-\cos20°}$

$=\frac{\sqrt{(\sin20°-\cos20°)^2}}{\sin20°-\cos20°}$

$=\frac{-(\sin20°-\cos20°)}{\sin20°-\cos20°}=-1$.

18.**解**：(1)由 $\sin A+\cos A=\frac{1}{5}$，

两边平方，得 $1+2\sin A\cdot\cos A=\frac{1}{25}$，

故 $\sin A\cdot\cos A=-\frac{12}{25}$.

(2) $(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cdot\cos A=\frac{49}{25}$.

由于 $\triangle ABC$ 中，$0°<A<180°$，

故 $\sin A>0$，又 $\sin A\cos A<0$，故 $\cos A<0$，

所以 $\sin A-\cos A>0$，则 $\sin A-\cos A=\frac{7}{5}$.

与已知条件联立，可得 $\sin A=\frac{4}{5}$，$\cos A=-\frac{3}{5}$. 则 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\frac{4}{3}$.

19.**解**：因为 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\alpha-\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{4}{5}$.

故 $\cos2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{12}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$，

$\cos2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{12}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{63}{65}$.

20.**解**：(1) $\tan B=\tan(\angle AMC-\angle BAM)=\frac{\tan\angle AMC-\tan\angle BAM}{1+\tan\angle AMC\tan\angle BAM}=-1$.

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{3\pi}{4}$.

(2)因为 $\alpha+\beta=B$，所以 $\beta=B-\alpha=\frac{3\pi}{4}-\alpha$.

所以 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{2}\sin\alpha-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)<1$.

所以 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sin\beta$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

21.(1)**证明**：因为 $\sin(\alpha+2\beta)=\frac{7}{5}\sin\alpha$，

所以 $\sin[(\alpha+\beta)+\beta]=\frac{7}{5}\sin[(\alpha+\beta)-\beta]$，

$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

$=\frac{7}{5}[\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta]$，

$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta=6\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$.　①

因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，且 $\cos\beta\neq0$.

若 $\cos(\alpha+\beta)=0$，则由①知 $\sin(\alpha+\beta)=0$，与 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$ 矛盾，所以 $\cos(\alpha+\beta)\neq0$. 所以①式两边同除以 $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta$，得 $\tan(\alpha+\beta)=6\tan\beta$.

(2)**解**：由(1)得 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\beta$，即 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=6\tan\beta$.

又 $\tan\alpha=3\tan\beta$，所以 $\frac{\frac{4}{3}\tan\alpha}{1-\frac{1}{3}\tan^2\alpha}=2\tan\alpha$. 又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，解得 $\tan\alpha=1$. 所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

22.(1)**证明**：因为 a 与 b 共线，所以 $\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{2}=0$，

即 $\sin\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

(2)**解**：由 $\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $f(x)$ 图像的对称轴方程是 $x=\frac{5}{3}+2k(k\in\mathbf{Z})$.

(3)**解**：由 $f\left(\frac{4A}{\pi}\right)=f\left(\frac{4B}{\pi}\right)=\frac{1}{2}$，得 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<B<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}<2B-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，且 $2A-\frac{\pi}{3}<2B-\frac{\pi}{3}$.

所以 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，$2B-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，解得 $A=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{7\pi}{12}$. 所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

所以 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.C

3.C

提示：$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$.

4.D

5.A

提示：以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的公共起点为坐标原点，以网格线分别为 x,y 轴，建立平面直角坐标系，则 $\boldsymbol{a}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(1,3)=(3,4)$.

6.A

提示：因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $3(2x+1)-4(2-x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$.

7.D

提示：设 $c=pa+qb$，则 $(3,-2)=p(-1,2)+q(1,-1)=(-p+q,2p-q)$，所以 $-p+q=3$，$2p-q=-2$，解得 $p=1$，$q=4$. 所以 $c=a+4b$.

8.C

9.A

提示：根据 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(a+b)$，可知与 $\overrightarrow{AD}$ 同向的是 $\frac{a+b}{|a|+|b|}$.

10.A

提示：由①得 $a=-b$，由②得 $-2a=b$，由③得 $a=4b$，这些均具有数乘关系，可得向量 a,b 共线，故选 A.

11.D

提示：由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$ 可知，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$，故 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$，故选 D.

12.A

提示：采用特殊值法，当 $\lambda=\mu=0$ 时，$\overrightarrow{OC}=0$，排除 B；当 $\lambda=\mu=1$ 时，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，排除 C；当 $\lambda=0,\mu=1$ 时，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$，排除 D.

二、填空题

13. 400km，$200\sqrt{2}$ km

提示：要注意路程与位移的区别.

14. 矩形

提示：根据向量加法的平行四边形法则，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$，$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$ 为平行四边形的两条对角线长，故▱$ABCD$ 的对角线相等，故应为矩形.

15. $\frac{1}{2}$

提示：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,1)$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2-m,1-m)$.

若 A,B,C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，

故 $3(1-m)-(2-m)=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

16. $\frac{1}{2}$

提示：由题意，得 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})$. 又 $\overrightarrow{BH}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，故存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{BH}=m\overrightarrow{BC}$.

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}m(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}m\overrightarrow{AC}$.

又 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

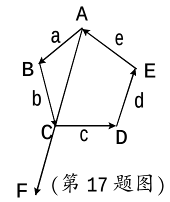
所以 $\lambda=\frac{1}{2}(1-m)$，$\mu=\frac{1}{2}m$.

所以 $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$.

三、解答题

17.**解**：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$.

如图所示，连接 AC 并延长至点 F，使 $CF=AC$，则 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}$，故向量 $\overrightarrow{AF}$ 即为所求作的向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}$.



(第17题图)

18.**解**：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}=a+\frac{1}{2}b-b=a-\frac{1}{2}b$，

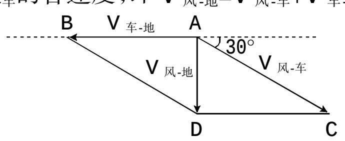
$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AB}=b+\frac{1}{2}a-a=b-\frac{1}{2}a$.

易知 G 是 $\triangle CBD$ 的重心，

故 $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}(a+b)$.

19.**解**：根据物理知识，在本题中有三个相对速度，汽车对地的速度为 $V_{车-地}$，风对车的速度为 $V_{风-车}$，风对地的速度为 $V_{风-地}$，

那么风对地的速度 $V_{风-地}$ 可以看成车对地的速度 $V_{车-地}$ 与风对车的速度 $V_{风-车}$ 的合速度，即 $V_{风-地}=V_{风-车}+V_{车-地}$，



(第19题图)

如图所示，根据向量知识可知：表示向量 $V_{风-地}$ 的有向线段 $\overrightarrow{AD}$ 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线，

因为 $|\overrightarrow{AC}|=4$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，$\angle ACD=30°$，

所以 $\angle ADC=90°$.

那么在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos30°=2\sqrt{3}$ (m/s).

答：风的实际方向是吹向正南方向，汽车速度的大小为 $2\sqrt{3}$ m/s.

20.**解**：由题意，知 $\overrightarrow{OA}=(0,5)$，$\overrightarrow{OB}=(4,3)$，$\overrightarrow{OC}=\left(0,\frac{5}{4}\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(2,\frac{3}{2}\right)$，

所以 $C\left(0,\frac{5}{4}\right)$，$D\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

设点 $M(x,y)$，

则 $\overrightarrow{AM}=(x,y-5)$.

因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线，$\overrightarrow{AD}=\left(2,-\frac{7}{2}\right)$，

所以 $-\frac{7}{2}x-2(y-5)=0$.　①

又 $\overrightarrow{CM}=\left(x,y-\frac{5}{4}\right)$，$\overrightarrow{CB}=\left(4,\frac{7}{4}\right)$，

且 $\overrightarrow{CM}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 共线，

所以 $\frac{7}{4}x-4\left(y-\frac{5}{4}\right)=0$.　②

联立①②，解得 $x=\frac{12}{7}$，$y=2$.

所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{12}{7},2\right)$.

21.(1)**证明**：若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，因为 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，所以存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，

即 $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\lambda\boldsymbol{e}_1-\lambda\boldsymbol{e}_2$，

由此得 $1=\lambda$ 且 $2=-\lambda$，

显然这样的实数 λ 不存在，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线. 所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可以作为一组基底.

(2)**解**：设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则

$3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=x(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)+y(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)$

$=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(-x+2y)\boldsymbol{e}_2$，

所以 $\begin{cases}3=x+y,\\-1=-x+2y,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{7}{3}$，$y=\frac{2}{3}$.

所以 $\boldsymbol{c}=\frac{7}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

22.**解**：(1)由已知条件，

得 $\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,-9)$.

设点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-3,y-7)$.

又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，得 $\begin{cases}x-3=1-2t,\\y-7=-1-9t.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=4-2t,\\y=6-9t,\end{cases}$ 即 $P(4-2t,6-9t)$.

①若点 P 在第一、三象限角平分线上，则 $4-2t=6-9t$，解得 $t=\frac{2}{7}$.

②若点 P 在第三象限内，

则 $\begin{cases}4-2t<0,\\6-9t<0,\end{cases}$ 解得 $t>2$.

(2)设点 $D(x,y)$.

当四边形为▱$ABCD$ 时，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

所以 $\begin{cases}1-x=1,\\-2-y=-1,\end{cases}$ 解得 $x=0$，$y=-1$.

所以 $D(0,-1)$.

当四边形为▱$ABDC$ 时，同理可得 $D(2,-3)$；当四边形为▱$ADBC$ 时，同理可得 $D(6,15)$.

综上可知点 D 的坐标为 $(0,-1)$ 或 $(2,-3)$ 或 $(6,15)$.

② 第6期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

提示：由已知条件，得 $|b|=|2a|=6$，且 b 与 a 方向相反.

所以 $a\cdot b=-|a||b|=-18$.

2.B

提示：$(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot2\overrightarrow{CA}-2|\overrightarrow{BC}|^2-2\overrightarrow{BC}\cdot2\overrightarrow{CA}=1\times1\times\cos120°+2\times1\times1\times\cos120°-2\times1^2-4\times1\times1\times\cos120°=-\frac{3}{2}$.

3.D

提示：由已知，得 $|e_1|=|e_2|=1$，则 e_1 在 e_2 方向上的射影为 $|e_1|\cos\theta=\cos\theta$，A正确；$e_1^2=e_2^2=1$，B正确；$(e_1+e_2)\cdot(e_1-e_2)=e_1^2-e_2^2=0$，故 $(e_1+e_2)\perp(e_1-e_2)$，C正确；$e_1\cdot e_2=|e_1||e_2|\cos\theta$，D错误.故选D.

4.C

提示：$2a+b=(2,10)$，则 $|2a+b|=\sqrt{2^2+10^2}=2\sqrt{26}$.

5.D

提示：$\cos\theta=\frac{3\times(-5)+4\times12}{\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{(-5)^2+12^2}}=\frac{33}{65}$.

6.D

提示：由于 $a+\lambda b$ 与 $-b$ 垂直，故 $(a+\lambda b)\cdot(-b)=0$，所以 $(3+2\lambda,4-\lambda)\cdot(-2,1)=0$，即 $-6-4\lambda+4-\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{2}{5}$.

7.A

提示：根据题意，得所求直线的斜率 $k=\frac{2}{3}$，故其方程为 $y-2=\frac{2}{3}(x+1)$，即 $2x-3y+8=0$.

8.A

提示：由题意，得 $\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，即BC与BC的中线互相垂直，这表明△ABC是一个以AB，AC为两腰的等腰三角形.

9.A

提示：a 在 b 方向上的射影为

$|a|\cos\theta=|a|\times\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a\cdot b}{|b|}=\frac{12}{5}$.

10.C

提示：根据题意，得

$|a+mb|^2=|a|^2+m^2|b|^2+2ma\cdot b$

$=1+m^2+\frac{6}{5}m=\left(m+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{25}$.

当 $m=-\frac{3}{5}$ 时，$|a+mb|^2$ 有最小值 $\frac{16}{25}$，

所以 $|a+mb|$ 的最小值是 $\frac{4}{5}$.

11.C

提示：作 $PM\perp OA$ 于 M，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\angle POA=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\leqslant a^2$.故选C.

12.D

提示：由 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，得 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$，因为 $\lambda\neq0$，所以 $\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{1+\lambda}{\lambda}\overrightarrow{OB}$.

又由 $x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=0$，得 $\overrightarrow{OC}=x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}$，根据平面向量基本定理，有

$\begin{cases}-\frac{1}{\lambda}=x^2,\\ \frac{1+\lambda}{\lambda}=x.\end{cases}$

消去 λ，得 $x^2+x-1=0$，

解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$，故选D.

二、填空题

13.-50

提示：$(2a-3b)\cdot(a+2b)=(-23,8)\cdot(6,11)=-23\times6+8\times11=-50$.

14.[-2,2]

提示：设 a 与 b 的夹角为 θ，则 $a\cdot b=|a||b|\cos\theta=2\cos\theta$.因为 $\theta\in[0,2\pi]$，所以 $\cos\theta\in[-1,1]$，$a\cdot b\in[-2,2]$.

15.$\sqrt{37}$

16.2.4

提示：若航程最短，则需航行的路线与河岸垂直. 因为垂直于河岸的实际速度是 $\sqrt{12.5^2-3.5^2}=12$(km/h)，所以过河需要 $\frac{0.48}{12}=0.04$(h)=2.4(min).

三、解答题

17.解：设 $b=(x,y)$.

由 $a\cdot b=5$，得 $4x-3y=5$. ①

由 $|b|=1$，得 $x^2+y^2=1$. ②

联立①②，解得 $x=\frac{4}{5}$，$y=-\frac{3}{5}$.

所以 $b=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

18.解：(1)原式 $=3a^2-8a\cdot b+4b^2$

$=3\times3^2-8\times3\times4\cos\frac{3\pi}{4}+4\times4^2$

$=91+48\sqrt2$.

(2)原式 $=\sqrt{(a+b)^2}$

$=\sqrt{a^2+2a\cdot b+b^2}$

$=\sqrt{3^2+2\times3\times4\cos\frac{3\pi}{4}+4^2}$

$=\sqrt{25-12\sqrt2}$.

19.解：因为 $(a+b)\cdot(a-b)=|a|^2-|b|^2=-1$，且 $|a|=\sqrt2$，所以 $|b|=\sqrt3$.

(1)设向量 a,b 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{\sqrt2}{2}$.

又 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$，所以 $\theta=45°$，

即向量 a,b 的夹角为45°.

(2)由 $|a-b|^2=a^2-2a\cdot b+b^2=4$，

结合已知条件，得 $a\cdot b=\frac{1}{2}$.

20.解：以三个力的作用点为原点，正东方向为 x 轴正半轴，建立平面直角坐标系.

由已知可得 $F_1=(1,\sqrt3)$，$F_2=(2\sqrt3,2)$，$F_3=(-3,3\sqrt3)$.

所以 $F=F_1+F_2+F_3$

$=(2\sqrt3-2,4\sqrt3+2)$.

又位移 $s=(4\sqrt2,4\sqrt2)$，所以

$W=F\cdot s=(2\sqrt3-2)\times4\sqrt2+(4\sqrt3+2)\times4\sqrt2=24\sqrt6$.

答：合力 F 所做的功为 $24\sqrt6$ J.

21.(1)证明：因为 $A(2,4)$，$B(-1,-2)$，$C(4,3)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-3,-6)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1)$.

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\times2+(-6)\times(-1)=0$.

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $AB\perp AC$.

(2)解：设点 $D(x,y)$，则 $\overrightarrow{AD}=(x-2,y-4)$.因为 AD 为 BC 边上的高，

所以 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

又 $\overrightarrow{BC}=(5,5)$，

所以 $5(x-2)+5(y-4)=0$. ①

因为 $\overrightarrow{BD}=(x+1,y+2)$，且 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，所以 $5(x+1)-5(y+2)=0$. ②

由①②，解得 $x=\frac{7}{2}$，$y=\frac{5}{2}$.

所以 $D\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

(3)解：$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$

$=\frac{5\times3+5\times6}{\sqrt{3^2+6^2}\times\sqrt{5^2+5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(4)证明：因为 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{9}{2}$，$|\overrightarrow{BD}|=\frac{9\sqrt2}{2}$，

$|\overrightarrow{CD}|=\frac{\sqrt2}{2}$.

所以 $|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$，

即 $AD^2=BD\cdot CD$.

22.解：(1)因为 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=-a-\frac{1}{2}b$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-a+\frac{1}{2}b$，所以 $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BE}=-2a$.

(2)假设在线段 AD 上存在满足条件的点 E，则 $\overrightarrow{AE}=\lambda b(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-a+\lambda b$.

①若 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}(-a+\lambda b)$，

则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\lambda b$.

又 $\overrightarrow{AC}=a+b$，且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AF}$ 是共线向量，则存在 $\mu\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，

即 $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\lambda b=\mu(a+b)$.

因为 a,b 是不共线的向量，

所以 $\begin{cases}\frac{2}{3}=\mu,\\ \frac{1}{3}\lambda=\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=2,\\ \mu=\frac{2}{3},\end{cases}$

此时 $\lambda=2$ 与 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 矛盾，舍去.

②若 $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}(-a+\lambda b)$，

则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}\lambda b$.

同①，得 $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}\lambda b=\mu(a+b)$，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{3}=\mu,\\ \frac{2}{3}\lambda=\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\ \mu=\frac{1}{3}.\end{cases}$

故存在满足条件的点 E，它是线段 AD 的中点.

第7期

第2~3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.D 4.C 5.A

6.B

提示：以向量 a,b 的交点为原点建立平面直角坐标系，可得 $a=(-1,1)$，$b=(6,2)$，$c=(-1,-3)$.因为 $c=\lambda a+\mu b$，所以 $\begin{cases}-1=-\lambda+6\mu,\\ -3=\lambda+2\mu,\end{cases}$ 解得 $\lambda=-2$，$\mu=-\frac{1}{2}$，故 $\frac{\lambda}{\mu}=4$.

7.D

提示：若 $|a+b|=|a-b|$，则以 a,b 为邻边的平行四边形为矩形，故两向量互相垂直.

8.A

提示：分别作 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的方向上的射影，可知 $\overrightarrow{AC}$ 的射影最大，由数量积的几何意义，可知选A.

9.D

提示：设点 C 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{OC}=(x,y)$，而 $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(3\alpha-\beta,\alpha+3\beta)$，所以 $(x,y)=(3\alpha-\beta,\alpha+3\beta)$，所以 $\begin{cases}x=3\alpha-\beta,\\ y=\alpha+3\beta,\end{cases}$ 解得 $\alpha=\frac{3x+y}{10}$，$\beta=\frac{-x+3y}{10}$.又 $\alpha+\beta=1$，代入化简可得 $x+2y-5=0$.

10.D

11.D

提示：由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 可知∠A的平分线与边BC垂直.又 $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$.所以△ABC为等边三角形.故选D.

12.B

提示：以 BC 所在直线为 x 轴，BC 的垂直平分线 AD 为 y 轴，D 为原点，建立平面直角坐标系，则 $A(0,\sqrt3)$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$.设 $P(x,y)$，得 $\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt3-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-2x,-2y)$.所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2\sqrt3y+2y^2=2x^2+2\left(y-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$.

所以当 $x=0$，$y=\frac{\sqrt3}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

二、填空题

13.-2

14.$\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$

提示：设所求的向量为 (x,y)，

则 $\begin{cases}2x-2y=0,\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow x=y=\pm\frac{\sqrt2}{2}$.

15.垂

提示：$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，所以 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$.所以点P的轨迹一定通过△ABC的垂心.

16.①③

提示：由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\mathbf{0}$，得 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PC}$，故四边形 $ABPC$ 是平行四边形.由此可知①③正确，②④错误.

三、解答题

17.解：(1)由已知，得 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$，

$\overrightarrow{AC}=(2,4)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1)$，

所以 $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=(3,9)-(4,8)+(1,1)=(0,2)$.

(2)设 $D(x,y)$.在□$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，而 $\overrightarrow{AD}=(x-1,y+2)$，所以 $\begin{cases}x-1=1,\\ y+2=1.\end{cases}$

解得 $x=2$，$y=-1$，即 $D(2,-1)$.

18.(1)证明：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=-5a-10b=-5\overrightarrow{AB}$.

又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 有公共点 B，

所以 A,B,D 三点共线.

(2)解：因为 $ka+12b$ 和 $3a+kb$ 共线，

所以存在实数 λ，使得 $ka+12b=\lambda(3a+kb)$.

所以 $\begin{cases}k=3\lambda,\\ 12=k\lambda,\end{cases}$ 解得 $k=\pm6$.

19.解：(1)$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

(2)结合(1)可得 $|\overrightarrow{DE}|^2=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{36}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{36}\times6^2+\frac{1}{6}\times6\times4\times\cos60°+\frac{1}{4}\times4^2=7$，

所以 $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt7$.

故线段 DE 的长为 $\sqrt7$.

20.解：(1)由题设得

$a\cdot b=|a||b|\cos120°=-3$.

所以 $(2a-b)\cdot(a+b)=2a^2+a\cdot b-b^2=-4$，

$|2a-b|=\sqrt{(2a-b)^2}$

$=\sqrt{4a^2-4a\cdot b+b^2}=\sqrt{37}$，

$|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+2a\cdot b+b^2}=\sqrt7$.

所以 $\cos\theta=\frac{(2a-b)\cdot(a+b)}{|2a-b||a+b|}=-\frac{4\sqrt{259}}{259}$.

(2)$(xa-b)\cdot(a+3b)=xa^2+(3x-1)a\cdot b-3b^2=-5x-24$.

因为 $xa-b$ 与 $a+3b$ 垂直，

所以 $-5x-24=0$，解得 $x=-\frac{24}{5}$.

21.证明：(1)以 A 为原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴，建立平面直角坐标系，令 $|AB|=2$，则 $B(2,0)$，$E(1,0)$，$D(0,1)$，$C(1,1)$.

所以 $\overrightarrow{ED}=(-1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1)$.所以 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BC}$.所以 $\overrightarrow{ED}\parallel\overrightarrow{BC}$，即 $ED\parallel BC$.

(2)由(1)可得 $G\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{DG}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{GB}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{GB}$.所以 $\overrightarrow{DG}\parallel\overrightarrow{GB}$.

又 $\overrightarrow{DG}$ 与 $\overrightarrow{GB}$ 有公共点 G，

所以 D,G,B 三点共线.

22.(1)证明：延长 AD 到 A_1，使得 $AD=DA_1$，连接 CA_1，A_1B，则四边形 ACA_1B 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.又 $\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

(2)证明：$\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$.

因为 $DE\perp BC$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=\frac{3}{2}$.

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$ 为常数 $\frac{3}{2}$.

(3)解：与(1)同理，可得 $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FD}$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})=\overrightarrow{AF}\cdot2\overrightarrow{FD}$

$=2|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{FD}|$.

又 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2}=\sqrt2$，

设 $|\overrightarrow{AF}|=x$，则 $|\overrightarrow{FD}|=\sqrt2-x(0\leqslant x\leqslant\sqrt2)$.

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})=2x(\sqrt2-x)$

$=-2\left(x-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+1$.

又 $0\leqslant x\leqslant\sqrt2$，所以 $\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})$ 的取值范围为[0,1].