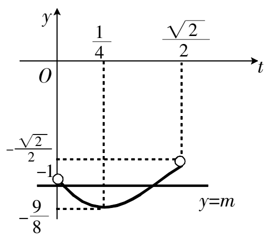
与函数 $y=2t^2-t-1,t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的图像如图所示.

由图像得当 $m\in\left(-\infty,-\frac{9}{8}\right)\cup\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时,方程有 0 个根;当 $m\in\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left\{-\frac{9}{8}\right\}$ 时,方程有 1 个根;当 $m\in\left(-\frac{9}{8},-1\right)$ 时,方程有 2 个根.



(第 22 题图)

第 12 期

第 2~3 版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.C 4.B 5.A 6.D 7.D 8.C

9.D

10.D

提示: 设 $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$,根据平行四边形法则,得 $NP/\!/AB$,所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{5}$.同理可得 $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$,所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABQ}}=\frac{4}{5}$.

11.B

提示: 显然要使结论成立,只需保证区间 $[x_1,x_1+2017]$ 能够包含函数至少一个完整的单调区间即可.又因为 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $2017\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$,

所以 $\omega\geqslant\frac{\pi}{2017}$.故 ω 的最小值为 $\frac{\pi}{2017}$.

12.D

提示: $f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1=2\sin x\cos x-2\cos^2x+1=\sin2x-\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $f(x)\in\left[-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,得 $-1\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{1}{2}$.又最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以 $b-a\neq\pi$.故选 D.

二、填空题

13.-2

14.$-\frac{59}{72}$

15.$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$

提示: 因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,

所以 $2\sin B\left(2\cos^2\frac{B}{2}-1\right)=-\sqrt{3}\cos2B$,

所以 $\sin2B=-\sqrt{3}\cos2B$,

即 $\tan2B=-\sqrt{3}$.

又因为 B 为锐角,所以 $2B\in(0,\pi)$,

所以 $2B=\frac{2\pi}{3}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

$f(x)=\sin2x\cos B-\cos2x\sin B=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是

$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

16.①③

提示: $y=\sin^4x-\cos^4x=\sin^2x-\cos^2x=-\cos2x$,所以其最小正周期为 π,故①正确;$\left\{\alpha\left|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ 表示坐标轴上的角的集合,故②错;③正确;函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上是增函数,故④错.

三、解答题

17.**解:**(1)$\tan\alpha=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}$.

(2)原式 $=2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$=\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{2\tan^2\alpha-\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}$

$=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}$

$=\frac{8}{5}$.

18.**解:**(1)由已知条件,得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1^2-2\times1\times2\times\cos60°+2^2=3$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

同理,得 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$,所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

(2)因为 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-2\times1^2+3\times1\times2\times\cos60°-2^2=-3$,

所以 $\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{3}\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\theta\in[0°,180°]$,所以 $\theta=150°$.

19.**解:**(1)由 $T=\frac{\pi}{2}$,得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=4$.因为 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取到最小值 -2,所以 $A=2$,且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2$,

即 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)将 $f(x)=A\sin(4x+\varphi)$ 的图像变换后得到 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图像,由新图像关于 y 轴对称,得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,故 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.所以 $f(x)=A\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant4x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$.

20.**解:**(1)设 $N(0,t)$,则 $\overrightarrow{AN}=(1,t)$.因为 $\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$,且 P,N,A 三点共线,

所以 $\sin\theta-t(\cos\theta+1)=0$.显然 $\cos\theta+1\neq0$,

所以 $t=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

所以 $N\left(0,\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$.

同理,得 $M\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta},0\right)$.

(2)易知 $\overrightarrow{PO}=(-\cos\theta,-\sin\theta)$,$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{-\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta},-\sin\theta\right)$,$\overrightarrow{PN}=\left(-\cos\theta,\frac{-\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$,

代入 $\overrightarrow{PO}=x\overrightarrow{PM}+y\overrightarrow{PN}$ 中并整理,

得 $\sin\theta\cdot x+(1+\sin\theta)y=1+\sin\theta$, ①

且 $(1+\cos\theta)x+\cos\theta\cdot y=1+\cos\theta$. ②

①+②并化简,得 $x+y=\frac{2+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=1+\frac{1}{1+\sin\theta+\cos\theta}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$.

由 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,从而可得 $x+y$ 的取值范围为 $\left[\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$.

21.**解:**(1)

$f(x)=\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\right]-\sqrt{3}\cos2x$

$=1+\sin2x-\sqrt{3}\cos2x$

$=1+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

即 $2\leqslant1+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant3$,

所以 $[f(x)]_{max}=3,[f(x)]_{min}=2$.

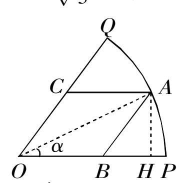
(2)因为 $f(x)-2<m<f(x)+2$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,

所以 $m>[f(x)]_{max}-2$,且 $m<[f(x)]_{min}+2$,

所以 $1<m<4$.

故 m 的取值范围是 $(1,4)$.

22.**解:** 如图所示,连接 OA,设 $\angle AOP=\alpha$,过 A 作 $AH\perp OP$,垂足为 H,在 $\mathrm{Rt}\triangle AOH$ 中,$AH=\sin\alpha,OH=\cos\alpha$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中,$\frac{AH}{BH}=\tan60°=\sqrt{3}$,所以 $BH=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$,所以 $OB=OH-BH=\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$.设平行四边形 $ABOC$ 的面积为 S,则 $S=OB\cdot AH=\left(\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\cos2\alpha)=\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{2}\cos2\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}$.



(第 22 题图)

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$,所以 $\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,$S_{max}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.所以当 A 是 $\overparen{PQ}$ 的中点时,所裁钢板面积最大,最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{m}^2$.

第 9 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.B

3.D

提示: 由 $\tan(\pi+2\alpha)=\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$,解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,或 $\tan\alpha=2$.又 α 为第二象限角,所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

4.C

提示: 原式 $=\cos^2\beta-\sin^2\beta=\cos2\beta$.

5.C

提示: 因为 $\frac{2\tan75°}{1-\tan^275°}=\tan150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\frac{1-\tan^275°}{\tan75°}=2\times\frac{1-\tan^275°}{2\tan75°}=-2\sqrt{3}$.

6.D

提示: 由 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,得 $2\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.又 $\sin2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,所以 $\cos2\theta=-\frac{1}{8}$.所以 $\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{2}}=\frac{3}{4}$.

7.C

提示: $(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A=1-\sin2A=\frac{5}{3}$.因为 $0<A<\pi$,所以 $\sin A>0$.又 $\sin2A=2\sin A\cos A<0$,所以 $\cos A<0$.所以 $\sin A-\cos A>0$.所以 $\sin A-\cos A=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

8.B

9.B

提示: $y=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin2x$.故选 B.

10.B

11.D

提示: 因为 $\sin2\alpha=2\sin2\beta$,所以 $\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=2\sin[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$.利用和、差角的正弦公式展开并化简,得 $\tan(\alpha+\beta)=3\tan(\alpha-\beta)$.

12.B

提示: 由诱导公式,得 $f(x)=\sin\left(2017x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2017x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(2017x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $A=2$.由题意,得 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2017}$,所以 $A|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{2017}$.

二、填空题

13.π

提示: $y=\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$.故最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

14.$-\frac{2}{5}$

提示: 易知 $\tan2x=-\frac{4}{3}$.

故所求式 $=\frac{3\tan2x+2}{1-3\tan2x}=-\frac{2}{5}$.

15.$\frac{1}{16}$

提示: 原式

$=\frac{2\sin6°\cos6°\cos12°\cos24°\cos48°}{2\cos6°}$

$=\frac{\sin12°\cos12°\cos24°\cos48°}{2\cos6°}$

$=\cdots=\frac{\sin96°}{2^4\cos6°}=\frac{\cos6°}{16\cos6°}=\frac{1}{16}$.

16.$\frac{3}{5}$

提示: $f(x)=\sqrt{5}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(x+\varphi)-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(x+\varphi)\right]=\sqrt{5}\sin(x+\varphi-\theta)$,其中 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

因为 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称,所以 $\pi+\varphi-\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=\theta-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $\cos2\varphi=\cos2\left(\theta-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos(2\theta-\pi)=-\cos2\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{3}{5}$.

三、解答题

17.**解:**(1)$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$.

(2)由已知,得 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$.

(3)因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

18.**解:** 原式 $=\frac{2\cos^2x(\cos^2x-1)+\frac{1}{2}}{\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$=\frac{-2\cos^2x\sin^2x+\frac{1}{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$=\frac{-\frac{1}{2}\sin^22x+\frac{1}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{\frac{1}{2}(1-\sin^22x)}{\cos2x}$

$=\frac{\frac{1}{2}\cos^22x}{\cos2x}=\frac{1}{2}\cos2x$.

19.**解:** $f(x)=\frac{a}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}a}{2}(1+\cos2x)+\frac{\sqrt{3}a}{2}+b=\frac{a}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}a}{2}\cos2x+b=a\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+b$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为

$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

20.**解:**(1)$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{1}{4}\cos^2x-\frac{3}{4}\sin^2x=\frac{1}{4}\times\frac{1+\cos2x}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}$.

故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

所以 $h(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 x 的集合为 $\left\{x\left|x=-\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

21.**解:** $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1+\cos\alpha)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.

因为 $\alpha\in(0,\pi)$,

所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $|\boldsymbol{a}|=2\cos\frac{\alpha}{2}$.

所以 $\cos\theta_1=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$.

又 $\theta_1\in[0,\pi]$,

所以 $\theta_1=\frac{\alpha}{2}$,即 $\alpha=2\theta_1$.

同理,得 $|\boldsymbol{b}|=2\left|\sin\frac{\beta}{2}\right|$.

因为 $\beta\in(\pi,2\pi)$,

所以 $\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sin\frac{\beta}{2}$.

所以 $\cos\theta_2=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{1-\cos\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}$

$=\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$.

又 $\theta_2\in[0,\pi]$,$\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\theta_2=\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}$,即 $\beta=2\theta_2+\pi$.

故 $\alpha-\beta=2\theta_1-(2\theta_2+\pi)=2(\theta_1-\theta_2)-\pi=2\times\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$.

22.**解:**(1)由题易得 $AH=BH=10,EH=\frac{10}{\cos\theta}$,

$FH=\frac{10}{\sin\theta}$，$EF=\frac{10}{\sin\theta\cos\theta}$，

所以 $L=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\sin\theta}+\frac{10}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{10(\sin\theta+\cos\theta+1)}{\sin\theta\cos\theta}$.

由于 $BE=10\tan\theta\leqslant10\sqrt{3}$，$AF=\frac{10}{\tan\theta}\leqslant10\sqrt{3}$，故 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\tan\theta\leqslant\sqrt{3}$，

所以 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

(2)设 $\sin\theta+\cos\theta=t$，

则 $t\in\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}\right]$，且 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$.

所以 $L=\frac{20}{t-1}$.

因为 $L=\frac{20}{t-1}$ 在 $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}\right]$ 内单调递减，所以当 $t=\sqrt{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，所铺设管道的成本最低，此时管道的长度为 $20(\sqrt{2}+1)$m.

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A　2.A　3.B　4.B　5.D　6.C

7.A

提示：$(13\sin A+5\cos B)^2+(5\sin B+13\cos A)^2=306\Rightarrow194+130\sin(A+B)=306\Rightarrow\sin(A+B)=\frac{56}{65}\Rightarrow\sin C=\frac{56}{65}$.

8.B

提示：由 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)>\cos x$，

可得 $\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}>\cos x$，

整理，得 $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>0$，所以 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$.

9.A

10.C

提示：由 $\log_{\sqrt{b}}x=\log_b(4x-4)$，得 $x^2=4x-4$，解得 $x=2$.所以 $\frac{C}{A}=\frac{\sin B}{\sin A}=2$.

在 $\triangle ABC$ 中，易知 $\sin C=\sin(A+B)$，所以 $\sin2A=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

即 $2\sin A\cos A=\sin A\cos B+2\sin A\cos A$，得 $\sin A\cos B=0$.显然 $\sin A\neq0$，所以 $\cos B=0$.

所以 $B=90°$，$A=30°$，$C=60°$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形，但不是等腰三角形.

11.C

提示：$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x+1$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由 $x\in[0,\pi]$，得 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.所以 $f(x)\in[0,3]$.

故选 C.

12.C

提示：$f(x)=2\sin x+\cos x-m=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)-m$，其中 $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

由已知条件，知 $x_1+\varphi$，$x_2+\varphi$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以 $x_1+\varphi+x_2+\varphi=\pi$，即 $x_1+x_2=\pi-2\varphi$.

所以 $\sin(x_1+x_2)=\sin(\pi-2\varphi)=\sin2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{4}{5}$.

二、填空题

13.$\sqrt{3}$

14.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

提示：$\sin15°+\sin75°=\sin(45°-30°)+\sin(45°+30°)=2\sin45°\cos30°=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

15.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

提示：$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=-\sqrt{1-\sin2\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.①④

提示：由已知，得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，可得 $2\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{6}$，$2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=5\cos\alpha\sin\beta$，①正确.由于 $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$，但 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos(\alpha-\beta)=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin2\alpha$ 不是一个值，②错误.若 α,β 是直角三角形的两个锐角，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=1$，与已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$ 矛盾，③错误.若 α,β 是一个三角形的两个内角，由①可得 $\tan\alpha=5\tan\beta$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4\tan\beta}{1+5\tan^2\beta}=\frac{4}{\frac{1}{\tan\beta}+5\tan\beta}=\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{1}{\tan\beta}}-\sqrt{5\tan\beta}\right)^2+2\sqrt{5}}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，④正确.

三、解答题

17.**解**：由 $2\sin\alpha\tan\alpha=3$，得 $2\sin^2\alpha=3\cos\alpha$，

即 $2(1-\cos^2\alpha)=3\cos\alpha$，

即 $2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$，

解得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，或 $\cos\alpha=-2$(舍去).

又 $0<\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

18.**解**：(1)$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$.

(2)$\frac{\sin2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha-1}$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$

$=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}=\frac{2\times2}{2^2+2-2}=1$.

19.**解**：(1)由 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

得 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由 $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

得 $\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

20.**解**：(1)$f(x)=2\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=2\pi$，解得 $\omega=\frac{1}{2}$.

(2)由 $f(\alpha)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+1=\frac{8}{5}$，

得 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

因为 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

21.**解**：(1)设十字形面积为 S，

$S=x^2+4\cdot x\cdot\frac{y-x}{2}=2xy-x^2$

$=2\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)$S=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$

$=\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\varphi)-\frac{1}{2}$，

其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故当 $\sin(2\theta-\varphi)=1$ 时，S 最大，最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22.**解**：(1)$f(x)=2+\sin x-\frac{1}{4}\left[4\cos^2x+4\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\right]=2+\sin x-\cos^2x-1+\sin x=\sin^2x+2\sin x$.

(2)在 $g(x)$ 的图像上任取一点 $M(x,y)$，则其关于原点的对称点 $N(-x,-y)$ 在 $f(x)$ 的图像上，

所以 $-y=\sin^2(-x)+2\sin(-x)$，得 $y=-\sin^2x+2\sin x$.所以 $g(x)=-\sin^2x+2\sin x$.

(3)$h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1=-(1+\lambda)\sin^2x+2(1-\lambda)\sin x+1$.

设 $\sin x=t$，则 $h(t)=-(1+\lambda)t^2+2(1-\lambda)t+1(-1\leqslant t\leqslant1)$.

当 $1+\lambda=0$，即 $\lambda=-1$ 时，$h(t)=4t+1$ 显然在 $[-1,1]$ 上是增函数.

当 $\lambda\neq-1$ 时，二次函数 $h(t)$ 图像的对称轴方程为 $t=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

若 $1+\lambda<0$，则 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\leqslant-1$，解得 $\lambda<-1$；若 $1+\lambda>0$，则 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\geqslant1$，解得 $-1<\lambda\leqslant0$.

综上，实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A　2.A　3.D　4.D　5.A　6.A　7.B　8.C

9.C

10.D

提示：分别取 $k=0,2,-1$，可知 A，B，C 正确，故选 D.

11.B

提示：$f(x)=4\sin\omega x\cdot\frac{1-\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}+\cos2\omega x-1=2\sin\omega x(1+\sin\omega x)+\cos2\omega x-1=2\sin\omega x$.

所以 $\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$ 是 $f(x)$ 含原点的递增区间.又 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}\leqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2\omega},\end{cases}$ 解得 $\omega\leqslant\frac{3}{4}$.又 $\omega>0$，所以 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{4}\right]$.

12.D

提示：$f(x)=\sqrt{3}\sin2x+1-\cos2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.根据正弦函数的性质可知③④正确.

二、填空题

13.$\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$

提示：在同一坐标系中作出 $y=\tan x$ 和 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的图像，求其交点横坐标，并观察图像便得.

14.$\frac{16}{5}$　15.$(0,-2)$

16.$\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$

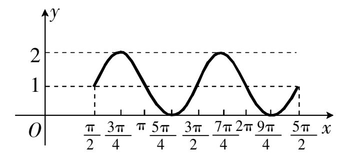
提示：以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，则 $M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.设 $C(x,0)$，则 $D\left(-\frac{1}{2}(1-x),\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\right)$，所以 $\overrightarrow{MC}=\left(x-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(\frac{1}{2}x-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.从而可得 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{8}$.又 $0\leqslant x\leqslant1$，所以 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$.

三、解答题

17.**解**：列表：

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$2x$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$1-\sin2x$	1	2	1	0	1

描点，连线，并以 π 为周期向右平移，得函数 $y=1-\sin2x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 上的图像如图.



(第 17 题图)

当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时，函数 $y=1-\sin2x$ 取得最大值，最大值为2.

18.**证明**：左边

$=\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin2x}$

$=\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin2x}$

$=\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}=$ 右边.

故等式成立.

19.**解**：(1)由已知条件，得 $\overrightarrow{AB}=(-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,5)$，

所以 $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1,7)$.

所以 $|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$.

(2)由(1)得 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{26}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，所以 $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

(3)设所求向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$.①

又 $\overrightarrow{BC}=(2,4)$，由 $\overrightarrow{BC}\perp\boldsymbol{m}$，得 $2x+4y=0$.②

由①②，解得 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ y=-\frac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

20.**解**：(1)由图像知 $A=2$，$T=8$.

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=8$，所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$.

又图像经过点 $(-1,0)$，

所以 $2\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)$y=f(x)+f(x+2)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{4}$.

因为 $-6\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$，

所以 $-\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\pi x}{4}\leqslant\frac{\pi}{6}$，

所以当 $\frac{\pi x}{4}=0$，即 $x=0$ 时，$y=f(x)+f(x+2)$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$；当 $\frac{\pi x}{4}=-\pi$，即 $x=-4$ 时，最小值为 $-2\sqrt{2}$.

21.(1)**证明**：由 A,M,N 三点共线，得 $\overrightarrow{AM}/\!/\overrightarrow{AN}$.设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AN}(\lambda\in\mathbf{R})$，则 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $m=n$.

(2)**解**：因为 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{AC}$，而 $m+n=1$，所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}m\overrightarrow{AC}$.

所以 $|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}(1-m)^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}m^2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(1-m)m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(1-m)^2+\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}(1-m)m=\frac{1}{4}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{16}$.故当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$|\overrightarrow{MN}|_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

22.**解**：(1)由 $\tan\alpha=\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$.

化简整理，得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha$，即 $\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha$.

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 或 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$，

即 $\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$ 或 $\beta=\frac{\pi}{2}$(舍去).所以 $\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$.

(2)由已知方程，得 $m=-\sin\alpha-\sin\beta=-\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=-\sin\alpha-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha-\sin\alpha-1$.

由 $\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$，且 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $t=\sin\alpha$，则 $t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，且 $m=2t^2-t-1$.

在同一平面直角坐标系中作出直线 $y=m$