答案页第 3 期
数学·北师大(选修 2-1)
第 9 期
第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:由题意,两定圆的圆心坐标为$O_1(0,0)$,$O_2(4,0)$,设动圆圆心为O,动圆半径为r,则$|OO_1|=r+1$,$|OO_2|=r+2$,所以$|OO_2|-|OO_1|=1<|O_1O_2|=4$,故动圆圆心的轨迹为双曲线的一支.

2.B

3.C

4.A

提示:由题意知$\frac{\sqrt{4+m^2}}{2}=\sqrt{3}$,解得$m=2\sqrt{2}$.

5.A

6.B

提示:因为方程$\frac{x^2}{k+2}-\frac{y^2}{5-k}=1$表示双曲线,所以$(k+2)\cdot(5-k)>0$,所以$(k+2)\cdot(k-5)<0$,解得$-2<k<5$.

7.B

8.A

提示:双曲线$mx^2+y^2=1$化为标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+y^2=1$,所以$\frac{1}{m}<0$,且焦点在$y$轴上,$a^2=1$,$b^2=-\frac{1}{m}$.又因为虚轴长是实轴长的2倍,所以$2b=2\times2a$,所以$b^2=4a^2$,即$-\frac{1}{m}=4\times1$,所以$m=-\frac{1}{4}$.

9.C

提示:因为$a=2$,$c=4$,所以$a+c=6$.当点P在左支时,有2个点满足题意;当点P在右支时,有1个点满足题意,共3个.

10.C

提示:令$f(x,y)=y^2-xy-2$,则$f(-x,-y)=y^2-xy-2=f(x,y)$,所以函数$f(x,y)$关于原点对称.

11.B

提示:设$|PF_1|>|PF_2|$.

由$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{n+2},\\|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{n},\end{cases}$

解得$\begin{cases}|PF_1|=\sqrt{n+2}+\sqrt{n},\\|PF_2|=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}.\end{cases}$

又$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{n+1}$,

所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4(n+1)=|F_1F_2|^2$.

所以$\triangle PF_1F_2$是直角三角形,且$\angle F_1PF_2=90°$.

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=1$.

12.C

提示:由题意,C_2的焦点为$(\pm\sqrt{5},0)$,渐近线方程为$y=\pm2x$,AB为圆的直径,即$|AB|=2a$.

所以$a^2-b^2=5$. ①

设C_1与渐近线:$y=2x$在第一象限的交点为$(x,2x)$,代入C_1的方程,得$x^2=\frac{a^2b^2}{b^2+4a^2}$. ②

由对称性知直线$y=2x$被C_1截得的弦长等于$2\sqrt{5}x$,则$2\sqrt{5}x=\frac{2a}{3}$,解得$x=\frac{a}{3\sqrt{5}}$. ③

由②③,得$a^2=11b^2$.代入①式,解得$a^2=\frac{11}{2}$,$b^2=\frac{1}{2}$.故选C.

二、填空题

13.$2\sqrt{3}$

14.$\sqrt{3}+1$

提示:连接AF_1,因为F_1F_2为圆O的直径,所以$\triangle AF_1F_2$为直角三角形.因为$\triangle AF_2B$为等边三角形,所以$\angle AF_2F_1=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

又$|F_1F_2|=2c$,

所以$|AF_1|=c$,$|AF_2|=\sqrt{3}c$.由双曲线的定义知$\sqrt{3}c-c=2a$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

15.椭圆

提示:由条件可化简为$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=4$,因为$4>2=|\overrightarrow{AB}|$,所以曲线$C$是椭圆.

16.$4\sqrt{6}$

提示:联立方程,利用弦长公式可得.

三、解答题

17.**解**:将$16y^2-9x^2=144$化为标准方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$,则顶点坐标为$(0,3)$和$(0,-3)$,虚轴长$2b=8$,焦点坐标为$(0,5)$和$(0,-5)$,离心率$e=\frac{5}{3}$.

18.**解**:(1)由题意设双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6-a^2}=1$,把点$(-5,2)$代入,得$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{6-a^2}=1$,解得$a^2=5$.所以双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{5}-y^2=1$.

(2)设双曲线的方程为$mx^2-ny^2=1(mn>0)$.

因为点P_1,P_2在该双曲线上,所以$\begin{cases}9m-32n=1,\\\frac{81}{16}m-25n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-\frac{1}{9},\\n=-\frac{1}{16}.\end{cases}$故双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

19.**解**:设$P(x,y)$,$B(m,n)$.

因为$|BP|:|PA|=1:2$,

所以$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$.

所以$(x-m,y-n)=\frac{1}{2}(3-x,1-y)$,

即$\begin{cases}m=\frac{3x-3}{2},\\n=\frac{3y-1}{2}.\end{cases}$

又因为$B(m,n)$在曲线$y^2=x+1$上,

所以$\left(\frac{3y-1}{2}\right)^2=\frac{3x-3}{2}+1$,

即$3y^2-2y-2x+1=0$.

所以点P的轨迹方程为$3y^2-2y-2x+1=0$.

20.**解**:设双曲线左焦点的坐标为$(-c,0)(c>0)$,将$x=-c$代入双曲线的方程,得M,N两点的坐标分别为$\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$和$\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$,

则圆的半径为$\frac{1}{2}|MN|=\frac{b^2}{a}$.

又以$|MN|$为直径的圆过右顶点,

故该圆半径为$a+c$,则$\frac{b^2}{a}=a+c$.

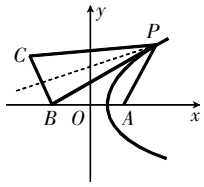
所以$\frac{c^2-a^2}{a}=a+c$,所以$c^2-ac-2a^2=0$,

所以$\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-2=0$,即$e^2-e-2=0$,

解得$e=-1$,或$e=2$.

又$e>1$,所以此双曲线的离心率$e=2$.

21.**解**:以AB所在的直线为x轴,AB的中点为坐标原点建立直角坐标系(如下图),



(第 21 题图)

则$A(3,0)$,$B(-3,0)$,$C(-5,2\sqrt{3})$.

由于B,C同时发现信号,

故$|PB|=|PC|$.

所以P在线段BC的垂直平分线l上,易知l的方程为$x-\sqrt{3}y+7=0$.

又因为A,B发现信号的时间差为4s,所以$|PB|-|PA|=4$.

故P在$2a=4$,$2c=6$的双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的右支上,与$l$的方程联立,解得$x=8$,$y=5\sqrt{3}$,或$x=-\frac{32}{11}$,$y=\frac{15\sqrt{3}}{11}$.所以直线$l$与双曲线右支的交点为$(8,5\sqrt{3})$,此即为$P$地的位置.

22.**解**:(1)依题意,点P的轨迹是以M,N为焦点的双曲线的右支,故W的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1(x>0)$.

(2)当$AB\perp x$轴时,设直线AB的方程为$x=x_0$,则$A(x_0,\sqrt{x_0^2-2})$,$B(x_0,-\sqrt{x_0^2-2})$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$.

当AB与x轴不垂直时,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线AB的方程为$y=kx+b$.

将直线AB的方程与W的方程联立并消去y,化简得$(1-k^2)x^2-2kbx-b^2-2=0$.

故$x_1+x_2=\frac{2kb}{1-k^2}$,$x_1x_2=\frac{b^2+2}{k^2-1}$.

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$=x_1x_2+(kx_1+b)(kx_2+b)$

$=(1+k^2)x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$

$=\frac{2k^2+2}{k^2-1}=2+\frac{4}{k^2-1}$.

又$x_1x_2>0$,所以$k^2-1>0$.从而$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$.

综上可知$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为2.

数学·北师大(选修 2-1)

第 10 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.D　4.D　5.B　6.B　7.D　8.C

9.B

提示:由 C_1 与 C_2 有公共的焦点,可得 $m^2-p^2=c^2$,$n^2+p^2=c^2$,故 $m^2+n^2=2c^2$.

又 $|MF_1|+|MF_2|=2m$,$|MF_1|-|MF_2|=2n$,解得 $|MF_1|=m+n$,$|MF_2|=m-n$.

所以 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=2(m^2+n^2)=4c^2=|F_1F_2|^2$.

所以 $\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{2}$.故选 B.

10.D

提示:由椭圆的几何性质得 $|PF_1|\in[a-c,a+c]$,$|PF_1|+|PF_2|=2a$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=a^2$,

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时取等号.

$|PF_1|\cdot|PF_2|=|PF_1|(2a-|PF_1|)$

$=-|PF_1|^2+2a|PF_1|=-(|PF_1|-a)^2+a^2$

$\geqslant -c^2+a^2=b^2$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值与最小值之差为 $a^2-b^2=c^2$.

11.A

提示:由已知,得 $b=\frac{p}{2}$,$a=2\sqrt{2}$,

渐近线方程为 $y=\pm\frac{p}{4\sqrt{2}}x$.

根据直线 $y=kx-1$ 与一条渐近线平行,不妨取 $k=\frac{p}{4\sqrt{2}}$,则由 $\begin{cases}y=\frac{p}{4\sqrt{2}}x-1,\\x^2=2py,\end{cases}$

可得 $x^2-\frac{p^2}{2\sqrt{2}}x+2p=0$.

所以 $\Delta=\left(-\frac{p^2}{2\sqrt{2}}\right)^2-8p=0$,解得 $p=4$.

12.B

提示:因为点 $Q\left(c,\frac{a}{2}\right)$ 在 C 的内部,

所以 $\frac{b^2}{a}>\frac{a}{2}\Rightarrow 2b^2>a^2\Rightarrow a^2>2c^2\Rightarrow\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由椭圆定义,得 $|PF_1|+|PQ|=2a-|PF_2|+|PQ|$.

要使 $|PF_1|+|PQ|<5|F_1F_2|$ 恒成立,

则 $2a-|PF_2|+|PQ|<5\times 2c$ 恒成立,

即 $|PQ|-|PF_2|<10c-2a$ 恒成立.

又 $|PQ|-|PF_2|\leqslant|QF_2|=\frac{a}{2}$,

所以 $\frac{a}{2}<10c-2a$,得 $\frac{c}{a}>\frac{1}{4}$.

所以离心率 e 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

二、填空题

13.33

提示:由 $||PF_1|-|PF_2||=16$,

得 $|PF_2|=1$,或 $|PF_2|=33$.

又 $|PF_2|\geqslant c-a=2$,得 $|PF_2|=33$.

14.$\sqrt{2}-1$

15.$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

16.①②④

提示:根据题意,动点 P 的轨迹是椭圆,其中 $a=2$,$c=1$,所以 $b^2=3$,椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,$x\in[-2,2]$,$y\in[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$. 对于①,$x^2+y^2=4$ 表示圆心在原点,半径为 2 的圆,且 $x\in[-2,2]$,$y\in[-2,2]$,所以存在满足条件的点 P,①正确;对于②,$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 表示椭圆,且 $x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$,$y\in[-2,2]$,所以存在满足条件的点 P,②正确;对于③,$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 表示双曲线,且 $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$,$y\in\mathbf{R}$,所以不存在满足条件的点 P,③错误;对于④,$y^2=8x$ 表示抛物线,且 $x\in[0,+\infty)$,$y\in\mathbf{R}$,所以存在满足条件的点 P,④正确.综上,正确的序号是①②④.

三、解答题

17.**解**:过点 P 作 PN 垂直直线 $y=-1$ 于 N.

依题意,得 $|PF|=|PN|$,

所以动点 P 的轨迹是以 $F(0,1)$ 为焦点,直线 $y=-1$ 为准线的抛物线,

所以点 P 的轨迹方程是 $x^2=4y$.

18.**解**:因为椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ 的长轴端点为 $(-\sqrt{10},0)$,$(\sqrt{10},0)$,

所以双曲线的焦点为 $(\pm\sqrt{10},0)$.

由双曲线的渐近线方程为 $3x\pm4y=0$,

即 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{3}=0$,

设双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda>0)$,

变形,得 $\frac{x^2}{16\lambda}-\frac{y^2}{9\lambda}=1$,

由题意,可知 $16\lambda+9\lambda=10$,

解得 $\lambda=\frac{2}{5}$.

所以此双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{32}{5}}-\frac{y^2}{\frac{18}{5}}=1$.

19.**解**:(1)由已知,得 $c=2$,$2|F_1F_2|=|PF_1|+|PF_2|=8\Rightarrow 2a=8$,所以 $a=4$.

所以 $b^2=a^2-c^2=12$.

所以此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos120°=|F_1F_2|^2=16$,

即 $(|PF_1|+|PF_2|)^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=16$.

又 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=48$.

所以 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin120°=12\sqrt{3}$.

20.**解**:联立 $y=k(x-1)$ 与 $x^2-y^2=4$ 并消去 y,

得 $(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0$,

所以 $\Delta=4k^4+4(1-k^2)(k^2+4)=4(4-3k^2)$.

(1)由直线 l 与双曲线有两个不同的交点,

得 $1-k^2\neq0$ 且 $\Delta>0$,

解得 $k\neq\pm1$ 且 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以实数 k 的取值范围是

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2)由直线 l 与双曲线有且只有一个交点,得

①$1-k^2=0$,解得 $k=\pm1$;

②$1-k^2\neq0$ 且 $\Delta=0$,解得 $k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以实数 k 的取值范围是

$\left\{\pm1,\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

21.**解**:由 $y^2=4x$,得 $p=2$,其准线方程为 $x=-1$,焦点 $F(1,0)$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

(1)由抛物线的定义,得 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}$,即 $4=x_1+1$,解得 $x_1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中,得 $y=\pm2\sqrt{3}$.所以点 A 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$ 或 $(3,-2\sqrt{3})$.

(2)直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,与抛物线方程联立并消去 y,

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

所以 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

由抛物线的定义,可知 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}=5$,解得 $k=\pm2$.

(3)设 $P(x,y)$,则点 P 到直线 $2x-y+4=0$ 的距离 $d=\frac{|2x-y+4|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\frac{y^2}{2}-y+4\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{5}}$.

所以当 $y=1$ 时,点 P 到直线 $2x-y+4=0$ 距离的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{10}$,此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{4},1\right)$.

22.(1)**解**:由题意,知椭圆离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$.

又 $2a+2c=4(\sqrt{2}+1)$,

解得 $a=2\sqrt{2}$,$c=2$,

所以 $b^2=a^2-c^2=4$.

所以该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

所以椭圆的焦点坐标为 $(\pm2,0)$.

因为双曲线为等轴双曲线,且顶点是该椭圆的焦点,

所以该双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)**证明**:设点 $P(x_0,y_0)$,

则 $k_1=\frac{y_0}{x_0+2}$,$k_2=\frac{y_0}{x_0-2}$,

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$.

又点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线上,

所以有 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{4}=1$,即 $y_0^2=x_0^2-4$,

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=1$.

(3)**解**:假设存在常数 λ,使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立.

由(2)知 $k_1\cdot k_2=1$,

则直线 AB 的方程为 $y=k_1(x+2)$,

直线 CD 的方程为 $y=\frac{1}{k_1}(x-2)$.

由方程组 $\begin{cases}y=k_1(x+2),\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y,得

$(2k_1^2+1)x^2+8k_1^2x+8k_1^2-8=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{-8k_1^2}{2k_1^2+1}$,$x_1x_2=\frac{8k_1^2-8}{2k_1^2+1}$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}{2k_1^2+1}$.

同理可得 $|CD|=\frac{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}{k_1^2+2}$.

又因为 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$,

所以有 $\lambda=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$

$=\frac{2k_1^2+1}{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}+\frac{k_1^2+2}{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}$

$=\frac{3k_1^2+3}{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

数学·北师大(选修 2-1)

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A　2.A　3.D

4.B

提示:$2p=10$,$p=5$,焦点到准线的距离是 p.

5.C　6.A　7.A　8.A

9.B

提示:由已知,得动点P的轨迹是以F_1,F_2为焦点,且$2a=2$的双曲线的左支,所以动点P满足的方程为$x^2-y^2=1(x<0)$.

将$y=\frac{1}{2}$代入,解得$x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

10.C　11.A　12.D

二、填空题

13.存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2+x_0-4\leqslant 0$

14.0

15.m

提示:由已知,得p,m必一真一假.若p是真命题,则q,m都是假命题,从而B,C都错误,不满足条件,故p是假命题,m是真命题.

16.2

提示:设焦点为F,则根据条件知$\triangle FAO$中,$\angle FAO$是直角,$\angle FOA=60°$,$|OF|=c$,$|OA|=a$,所以$\frac{a}{c}=\cos 60°=\frac{1}{2}$,即双曲线$C$的离心率是2.

三、解答题

17.**解**:令$f(x)=x^2+(2k-1)x+k^2$,

方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$ 有两个大于 1 的实数根

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(2k-1)^2-4k^2\geqslant 0,\\ -\frac{2k-1}{2}>1,\\ f(1)>0,\end{cases}$$

解得 $k<-2$.

所以其充要条件为 $k\in(-\infty,-2)$.

18.**解**:若p为真命题,则$\begin{cases}3-a>0,\\1+a>0,\\3-a\neq 1+a,\end{cases}$

解得$-1<a<3$且$a\neq 1$.

若q为真命题,

当$a=2$时,$-4<0$恒成立;

当$a\neq 2$时,有

$\begin{cases}a-2<0,\\ \Delta=4(a-2)^2-4(a-2)\times(-4)<0,\end{cases}$

解得$-2<a<2$,

故$-2<a\leqslant 2$.

若p且q是真命题,则实数a的取值范围是$(-1,1)\cup(1,2]$.

19.**解**:(1)由椭圆C的一个焦点为$F(0,-\sqrt{2})$,得椭圆C焦点在y轴上,且另一个焦点为$F'(0,\sqrt{2})$,半焦距$c=\sqrt{2}$.

又点$M(1,\sqrt{2})$在椭圆C上,

所以$2a=|MF|+|MF'|=4$.

所以$a=2$,$b^2=a^2-c^2=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$.

(2)联立直线l与椭圆C的方程,

解得$x=0$,$y=-2$,或$x=\frac{4}{3}$,$y=\frac{2}{3}$.

所以$A(0,-2)$,$B\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$,

$|AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

20.(1)**解**:以O为坐标原点,OA,OC,OO_1所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则$B(1,1,0)$,$A_1(1,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面A_1BC_1的法向量,则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$,而$\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$,所以$\begin{cases}-y+z=0,\\-x+z=0,\end{cases}$即$x=y=z$.

取$z=1$,则$x=y=1$,故$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面A_1BC_1的一个法向量.

(2)**证明**:因为$E\left(0,\frac{2}{3},1\right)$,$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$,

则$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,

又$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$,

所以$\overrightarrow{EF}\perp\boldsymbol{n}$,所以$EF$∥平面$A_1BC_1$.

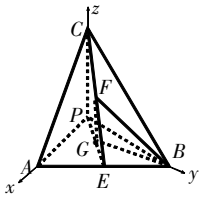
21.**解**:(1)以 PA 所在直线为 x 轴,PB 所在直线为 y 轴,PC 所在直线为 z 轴,P 为原点建立空间直角坐标系,如图所示,则 $B(0,2,0)$,$C(0,0,4)$,$A(2,0,0)$.

因为 E 为 AB 的中点,

所以 $E(1,1,0)$.

因为 F 为 CE 的中点,

所以 $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$.



(第 21 题图)

(2)连接 PE,设 G 为 PE 的中点,连接 FG,BG,则 $G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

因为 PA,PB,PC 两两互相垂直,

所以 $PC\perp$平面 ABP,

因为 F,G 分别为 CE,PE 的中点,

所以 FG∥PC,

所以 $FG\perp$平面 ABP.

故 $\angle FBG$ 为 BF 与平面 ABP 所成的角.

因为 $\cos\angle FBG=\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}\rangle$,$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},2\right)$,$\overrightarrow{BG}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0\right)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}\rangle=\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BG}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}=\frac{\sqrt{65}}{13}$,

即 BF 与底面 ABP 所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{65}}{13}$.

22.**解**:(1)双曲线D的标准方程为$\frac{y^2}{\frac{2}{3}}-\frac{x^2}{\frac{1}{3}}=1$.

由题意,得抛物线C的顶点为原点O,焦点为$(0,\pm 1)$.

故抛物线C的方程为$x^2=4y$或$x^2=-4y$.

(2)若点$P(t,1)(t>0)$为抛物线C上的定点,

则抛物线C的方程为$x^2=4y$,

可得$P(2,1)$.

设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$.

因为$PA\perp PB$,

所以$k_{PA}k_{PB}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}$

$=\frac{(x_1+2)(x_2+2)}{16}=-1$,

即$x_1x_2+2(x_1+x_2)+20=0$.①

设直线AB的方程为$y=kx+b$,

将其与$x^2=4y$联立并消去y,

整理得$x^2-4kx-4b=0$.

所以$x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4b$.

代入①式中,可得$b=2k+5$.

所以直线AB的方程为

$y=kx+2k+5=k(x+2)+5$.

由直线方程的点斜式,

可知直线AB经过定点$(-2,5)$.

数学·北师大(选修 2-1)

第 12 期

第 2~3 版综合检测题(二)

参考答案

一、选择题

1.A

2.D

3.A

提示：要求 $a>b$ 成立的充分不必要条件，必须满足由选项能推出 $a>b$，而由 $a>b$ 不能推出选项.在选项 A 中，$a>b+1$ 能使 $a>b$ 成立，而 $a>b$ 时，$a>b+1$ 不一定成立，故正确；在选项 B 中，$a>b-1$ 时，$a>b$ 不一定成立，故 B 错误；在选项 C 中，$a^2>b^2$ 时，$a>b$ 也不一定成立，因为 a,b 不一定同为正数，故 C 错误；在选项 D 中，“$a^3>b^3$”是“$a>b$”成立的充要条件，故 D 错误.

4.A

提示：依题意知，焦点 $\left(0,\frac{2}{|m|}\right)$ 在 y 轴正半轴上，因此 $m>0$，且有 $\frac{m}{4}=\frac{2}{|m|}$，解得 $m=2\sqrt{2}$.

5.B

6.A

提示：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=(\cos^2\alpha+1+\sin^2\alpha)-(\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha)=0$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 90°.

7.A

提示：由题设知 $mn\neq0$，又 $m+n=1$，则 $\overrightarrow{OP}=(1-n)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-n\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，所以 $\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$，因此 A,P,B 共线，即点 P 必在直线 AB 上.

8.B

提示：设 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 为 y 轴上的单位向量，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\times1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.即 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成的角为 $\frac{3\pi}{4}$，所以 y 轴与平面 α 所成的角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

9.A

10.A

提示：$4-b^2=1$，故 $b^2=3$，

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

联立 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 与 $y=kx+2$，得 $(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$，

有 $\Delta=(16k)^2-16(4k^2+3)\leqslant0$，

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$.

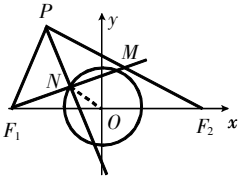
11.D

12.B

提示：连接 ON，如图所示，则

$||PF_2|-|PF_1||=||PF_2|-|PM||=|MF_2|=2|ON|=2<|F_1F_2|$.

故点 P 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的双曲线.



(第 12 题图)

二、填空题

13.x 轴，$-3-\log_2x$　14.4　15.6

16.$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

三、解答题

17.**解**：由 $x^2-4ax+3a^2<0$ 及 $a<0$，得 $3a<x<a$，即 $p:3a<x<a$.

由 $x^2-x-6\leqslant0$，得 $-2\leqslant x\leqslant3$；

由 $x^2+2x-8>0$，得 $x<-4$ 或 $x>2$，

所以 $q:x<-4$ 或 $x\geqslant-2$.

因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，

所以 $p\Rightarrow q$，

于是，得 $\begin{cases}3a\geqslant-2,\\a<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\leqslant-4,\\a<0,\end{cases}$

得 $-\frac{2}{3}\leqslant a<0$ 或 $a\leqslant-4$.

故实数 a 的取值范围为

$(-\infty,-4]\cup\left[-\frac{2}{3},0\right)$.

18.**解**：因为 $a>0,a\neq1$，所以命题 p 为真时 $\Leftrightarrow0<a<1$，命题 p 为假时 $\Leftrightarrow a>1$；

命题 q 为真时 $\Leftrightarrow\Delta=(2a-3)^2-4>0$，且 $a>0,a\neq1\Leftrightarrow0<a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{5}{2}$，命题 q 为假时 $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $1<a\leqslant\frac{5}{2}$.

由“p 或 q”为真且“p 且 q”为假，

知 p,q 有且只有一个为真命题.

若 p 真 q 假，则 $a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$；

若 p 假 q 真，则 $a\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

所以实数 a 的取值范围是

$\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

19.**解**：(1)由已知，得 $p=4$，

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2=8x$.

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x,y)$，

则 $y_1^2=8x_1,y_2^2=8x_2$.

两式作差，得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.

当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$，

即 $k_{AB}=\frac{8}{2y}=k_{MP}=\frac{y-0}{x-3}$，所以 $y^2=4x-12$；

当 $x_1=x_2$ 时，$AB\perp x$ 轴，则 AB 的中点即为点 $P(3,0)$，也满足 $y^2=4x-12$.

综上所述，弦 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $y^2=4x-12$.

20.(1)**解**：由 $F_2(2,0)$，得 $a^2-b^2=4$；

由 $F_3(-6,0)$，得 $a^2+b^2=36$.

联立以上两式，解得 $a^2=20,b^2=16$.

所以曲线 Γ 的方程为

$\begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1,y\leqslant0,\\\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1,y>0.\end{cases}$

(2)**证明**：曲线 C_2 的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

设直线 $l:y=\frac{b}{a}(x-m)$，

与曲线 C_1 的方程联立并消去 y，

整理得 $2x^2-2mx+(m^2-a^2)=0$.

设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，

则 $x_1+x_2=m,x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2}$，

$y_0=\frac{b}{a}(x_0-m)=-\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{2}=-\frac{b}{a}x_0$，

即点 $M(x_0,y_0)$ 在另一条渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上.

21.(1)**证明**：取 $A'B'$ 中点 P，连接 MP,NP，而 M,N 分别是 $A'B$ 与 $B'C'$ 的中点，

所以 $MP/\!/AA',PN/\!/A'C'$，

所以 $MP/\!/$ 平面 $A'ACC'$，$PN/\!/$ 平面 $A'ACC'$.

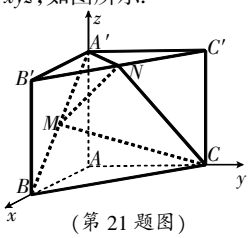
又 $MP\cap NP=P$，

因此平面 $MPN/\!/$ 平面 $A'ACC'$.

而 $MN\subset$ 平面 MPN，

所以 $MN/\!/$ 平面 $A'ACC'$.

(2)**解**：以 A 为坐标原点，AB,AC,AA' 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立直角坐标系 $Axyz$，如图所示.



(第 21 题图)

设 $AA'=1$，则 $AB=AC=\lambda$，

于是 $A(0,0,0),B(\lambda,0,0),C(0,\lambda,0),A'(0,0,1),B'(\lambda,0,1),C'(0,\lambda,1)$.

所以 $M\left(\frac{\lambda}{2},0,\frac{1}{2}\right),N\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},1\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 $A'MN$ 的法向量，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'M}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'N}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{\lambda}{2}x_1-\frac{1}{2}z_1=0,\\\frac{\lambda}{2}x_1+\frac{\lambda}{2}y_1=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(1,-1,\lambda)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 MNC 的法向量，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{\lambda}{2}x_2+\frac{\lambda}{2}y_2-z_2=0,\\\frac{\lambda}{2}y_2+\frac{1}{2}z_2=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(-3,-1,\lambda)$.

因为平面 $A'MN$ 与平面 CMN 所成的角为 90°，

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

即 $-3+(-1)\times(-1)+\lambda^2=0$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.

22.**解**：如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}$ 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系 $Axyz$.依题意可得

$A(0,0,0),B(2,0,0)$，

$C(0,4,0),P(0,0,4)$，

$D(0,0,2),E(0,2,2)$，

$M(0,0,1),N(1,2,0)$.

(1)**证明**：$\overrightarrow{DE}=(0,2,0),\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\2x-2z=0.\end{cases}$

不妨设 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

又 $\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

因为 $MN\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $MN/\!/$ 平面 BDE.

(2)**解**：易知 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$ 为平面 CEM 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 为平面 EMN 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EM}=0,\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0,\end{cases}$

因为 $\overrightarrow{EM}=(0,-2,-1),\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，

所以 $\begin{cases}-2y-z=0,\\x+2y-z=0.\end{cases}$ 不妨设 $y=1$，

可得 $\boldsymbol{n}_2=(-4,1,-2)$.

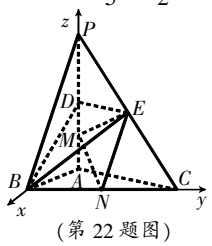
因此，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-4}{1\times\sqrt{16+1+4}}=-\frac{4}{\sqrt{21}}$，

于是 $\sin\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\sqrt{105}}{21}$.

所以平面 CEM 与平面 NEM 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{21}$.

(3)**解**：依题意，设 $AH=h(0\leqslant h\leqslant4)$，则 $H(0,0,h)$，进而可得 $\overrightarrow{NH}=(-1,-2,h)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$.由已知，得 $|\cos\langle\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{21}$，整理，得 $10h^2-21h+8=0$，解得 $h=\frac{8}{5}$，或 $h=\frac{1}{2}$.

所以线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.



(第 22 题图)