答案页第 2 期
数学·北师大(选修 2-1)
第 5 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.B　4.A　5.B　6.C　7.B　8.B　9.B　10.B　11.D　12.C

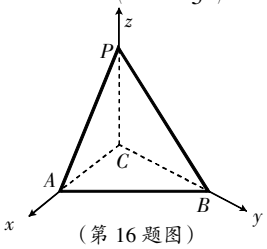
二、填空题

13.$\frac{\sqrt{5}}{10}$　14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$,45°,45°

15.$4\pm\sqrt{15}$

16.3

提示:如图,建立空间直角坐标系,则 $A(4,0,0),B(0,3,0),P\left(0,0,\frac{9}{5}\right)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(-4,3,0),\overrightarrow{AP}=\left(-4,0,\frac{9}{5}\right)$,



(第 16 题图)

所以点 P 到斜边 AB 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{AB}|^2}}=3.$$

三、解答题

17. **证明**:以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

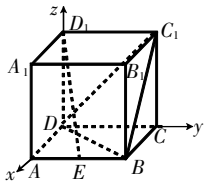
设 $PA=AD=a,AB=b$,则 $P(0,0,a),D(0,a,0),C(b,a,0),M\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right),N\left(\frac{b}{2},0,0\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(0,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{PD}=(0,a,-a)$,$\overrightarrow{PC}=(b,a,-a)$.

易知 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ 且 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,即 $\overrightarrow{MN}$ 是平面 PCD 的一个法向量,

所以 $MN\perp$ 平面 PCD.

18.**解**:建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(1,1,0),C_1(0,1,1),D_1(0,0,1),E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.



(第 18 题图)

所以 $\overrightarrow{D_1E}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.

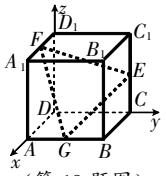
设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BC_1D 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设 D_1E 与平面 BC_1D 的夹角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{D_1E},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{D_1E}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

所以 D_1E 与平面 BC_1D 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

19.**解**:如图建立空间直角坐标系,



(第 19 题图)

则 $A\ (a,0,0),E\left(0,a,\frac{a}{2}\right),F\left(\frac{a}{2},0,a\right),G\left(a,\frac{a}{2},0\right)$,

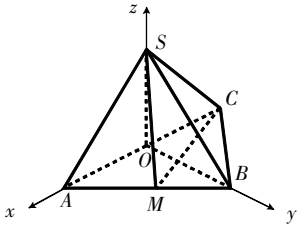
所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{a}{2},-a,\frac{a}{2}\right),\overrightarrow{EG}=\left(a,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right),\overrightarrow{GA}=\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 EFG 的一个法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 2x-y-z=0,\end{cases}$

所以 $x=y=z$,可取 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,

所以 $d=\frac{|\overrightarrow{GA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$,即点 A 到平面 EFG 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

20.**解**:(1)取 AC 的中点 O 为坐标原点,建立空间直角坐标系(如图所示),则 $A(2,0,0),C(-2,0,0),S(0,0,2),B(0,2\sqrt{3},0),M(1,\sqrt{3},0)$,



(第 20 题图)

所以 $\overrightarrow{MS}=(-1,-\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{MC}=(-3,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OS}=(0,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 SMC 的一个法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MS}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x-\sqrt{3}y+2z=0,\\ -3x-\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $x=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$.

取 $\overrightarrow{OS}$ 为平面 AMC 的法向量,所以

$$\cos\langle\overrightarrow{OS},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OS}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OS}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以平面 SCM 与平面 ACM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)因为 $\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$,由(1)知平面 SMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$,

所以点 B 到平面 SMC 的距离

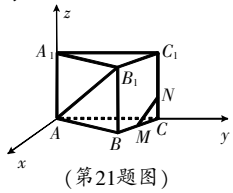
$$d=\frac{|\overrightarrow{MB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1+3+0|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

21.**解**:如图,以点 A 为原点,AC,AA_1 所在直线分别为 y,z 轴,过 A 点垂直于 AC 的直线为 x 轴,建立空间直角坐标系 $A-xyz$.因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是 2,

所以 $A(0,0,0),B_1(\sqrt{3},1,2),B(\sqrt{3},1,0),C(0,2,0)$,

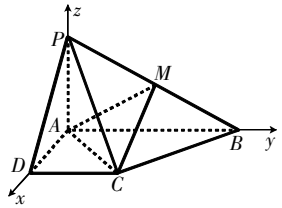
所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

假设在侧棱 CC_1 上存在点 N,使得异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于 45°,可设 $N(0,2,m)(0\leqslant m\leqslant 2)$,则 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,2)$,$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},m\right)$,所以 $|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{m^2+1}$,$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=2m-1$.因为异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于 45°,所以 $\overrightarrow{AB_1}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的夹角是 45°或 135°.又因为 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MN}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}$,所以 $\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $m=-\frac{3}{4}$.但 $-\frac{3}{4}\notin[0,2]$,所以点 N 不在侧棱 CC_1 上,即在侧棱 CC_1 上不存在点 N,使得异面直线 AB_1 和 MN 的夹角等于 45°.



(第21题图)

22.(1)**证明**:以 A 为坐标原点,AD,AB,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(如图).



(第 22 题图)

则 $A\ (0,0,0),B\ (0,2,0),C(1,1,0),D(1,0,0),P(0,0,1),M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,

且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,所以 $AP\perp DC$.

由题设知 $AD\perp DC$,且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线,由此得 $DC\perp$ 平面 PAD.又 $DC\subsetneq$ 平面 PCD,故平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

(2)**解**:因为 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$,

故 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5}$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}>0$,

故 $0<\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle<\frac{\pi}{2}$,

所以直线 AC 与 PB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3)**解**:由 $\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$,

知平面 AMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$.

由 $\overrightarrow{BM}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{CB}=(-1,1,0)$,

知平面 BMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,2)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{3}$.

所以平面 AMC 与平面 BMC 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C

4.B　5.C

提示:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$.

设平面 AB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y+2z=0,\\ -x+2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

故点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离为$\dfrac{\left|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$.

6.C

提示:$|PQ|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$

$=\sqrt{(3\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(3\sin\alpha-2\sin\beta)^2}$

$=\sqrt{13-12\cos(\alpha-\beta)}$.

当 $\cos(\alpha-\beta)=-1$ 时,$|PQ|_{\max}=5$;

当 $\cos(\alpha-\beta)=1$ 时,$|PQ|_{\min}=1$.

7.C

提示:$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=1+1+1+0+0+2\times1\times1\times\cos120°=2$.

所以$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{2}$.

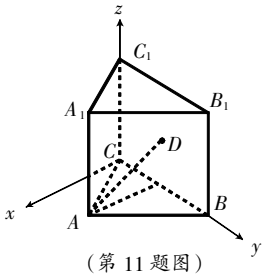
8.C

9.D

提示:$\sin\theta=\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

10.B　11.C

提示:如图,以 C 为原点,CB 所在直线为 y 轴,CC_1 所在直线为 z 轴,过点 C 在平面 ABC 内作 BC 的垂线为 x 轴,建立空间直角坐标系.



(第 11 题图)

设三棱柱的棱长为 2,

所以 $A(\sqrt{3},1,0)$,$D(0,1,1)$,$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},0,1)$.

易知平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$,

所以$\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

设直线 AD 与平面 BB_1C_1C 的夹角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\theta=60°$.

12.B

提示:由题意,知 $BD\perp$ 平面 ACD,所以 $BD\perp AC$,所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,故①错;平面 ADC 与平面 ABC 不垂直,所以它们的法向量也不垂直,故④错.

二、填空题

13.–4

提示:由题意,知$\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$,$\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$,则$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影为$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-20}{5}=-4$.

14.$\dfrac{5}{6}$　15.$\pm\sqrt{39}$　16.3

三、解答题

17.**解**:因为 $BG=2GD$,

所以$\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

又$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})$

$=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

18.**解**:$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$,

所以$(AC')^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA'}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$

$=25+9+49+2(5\times3\cos60°+5\times7\cos45°+3\times7\cos45°)$

$=98+56\sqrt{2}$,

所以$\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{98+56\sqrt{2}}$,即 AC' 的长为$\sqrt{98+56\sqrt{2}}$.

19.**解**:以 B 为坐标原点,以 BC,BA,BD 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$E(1,1,0)$.

设点 D 的坐标为 $(0,0,z)(z>0)$,则$\overrightarrow{BE}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,-2,z)$,设$\overrightarrow{BE}$与$\overrightarrow{AD}$所成角为 θ,则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{2}\times\sqrt{4+z^2}\cdot\cos\theta=-2$,且 AD 与 BE 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

所以$|\cos\theta|=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{4+z^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

所以$\cos^2\theta=\dfrac{2}{4+z^2}=\dfrac{1}{10}$,得 $z=4$,即 BD 的长为 4.

又$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}|AB|\cdot|BC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{6}\times2\times2\times4=\dfrac{8}{3}$,因此四面体 $ABCD$ 的体积是$\dfrac{8}{3}$.

20.(1)**证明**:设 AC 与 BD 交于点 G.

因为 $EF/\!/AG$,且 $EF=1$,$AG=\dfrac{1}{2}AC=1$.

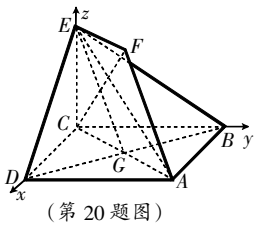
所以四边形 $AGEF$ 为平行四边形,

所以 $AF/\!/EG$.

因为 $EG\subsetneq$ 平面 BDE,$AF\not\subset$ 平面 BDE,所以 $AF/\!/$ 平面 BDE.

(2)**证明**:因为正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面相互垂直,且 $CE\perp AC$,所以 $CE\perp$ 平面 $ABCD$.

如图,以 C 为原点,建立空间直角坐标系 $C-xyz$.



(第 20 题图)

则 $C(0,0,0)$,$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$E(0,0,1)$,$D(\sqrt{2},0,0)$,

所以$\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$\overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{DE}=(-\sqrt{2},0,1)$,

所以$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,

所以 $CF\perp BE$,$CF\perp DE$.

又 $BE\cap DE=E$,

所以 $CF\perp$ 平面 BDE.

(3)**解**:由(2)知,$\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$是平面 BDE 的一个法向量.

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,

即$\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\ -\sqrt{2}y+z=0,\end{cases}$所以 $x=0$,且 $z=\sqrt{2}y$.

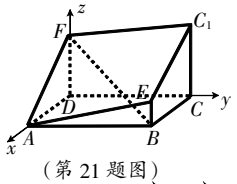
令 $y=1$,则 $z=\sqrt{2}$,

所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{2})$.

所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以平面 ABE 与平面 BED 夹角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$.

21.**解**:以 D 为坐标原点,DA,DC,DF 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(如图),则 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,4,0)$,$C(0,4,0)$,$E(2,4,1)$,$C_1(0,4,3)$.



(第 21 题图)

(1)设 $F(0,0,z)$.由$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC_1}$,得 $(-2,0,z)=(-2,0,2)$,所以 $z=2$.

所以 $F(0,0,2)$,$\overrightarrow{BF}=(-2,-4,2)$,

所以$\left|\overrightarrow{BF}\right|=2\sqrt{6}$.

(2)设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 AEC_1F 的法向量,

又$\overrightarrow{AE}=(0,4,1)$,$\overrightarrow{AF}=(-2,0,2)$,

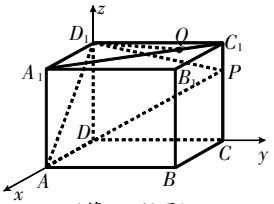
由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}4y+z=0,\\ -2x+2z=0.\end{cases}$令 $z=1$,则 $x=1$,$y=-\dfrac{1}{4}$,所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\dfrac{1}{4},1\right)$.

又$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,3)$,

则 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4\sqrt{33}}{11}$.

所以点 C 到平面 AEC_1F 的距离为$\dfrac{4\sqrt{33}}{11}$.

22.**解**:(1)如图,建立空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,1,m)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.



(第 22 题图)

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

又由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$,知$\overrightarrow{AC}$为平面 BDD_1B_1 的一个法向量.

设 AP 与平面 BDD_1B_1 的夹角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$,

依题意有$\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\dfrac{1}{3}$,

解得 $m=4$,或 $m=-4$(舍去).

故当 $m=4$ 时,直线 AP 与平面 BDD_1B_1 夹角的正弦值为$\dfrac{1}{3}$.

(2)若在线段 A_1C_1 上存在这样的点 Q,设此点的横坐标为 x,则 $Q(x,1-x,1)$,

所以$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意,对任意的 m 要使 D_1Q 在平面 APD_1 上的投影垂直于 AP,即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow-x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

即 Q 为 A_1C_1 的中点时,满足题设的要求.

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

2.D

3.D

4.C

提示:由 $ax^2+by^2=1$,得 $\frac{x^2}{\frac{1}{a}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b}}=1$.

因为焦点在 x 轴上,所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$,

所以 $0<a<b$.

5.D

6.D

提示:$c=2$,$b=1$,$a=\sqrt{5}$,$e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7.C

提示:方程化为标准方程 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{a}=1$,因为椭圆焦点在 x 轴,所以 $7>a$.直线过定点(0,1),要使直线与椭圆恒有公共点,需(0,1)在椭圆内或椭圆上,则 $a\cdot 0+7\times 1\leqslant 7a$,即 $a\geqslant 1$.故选 C.

8.D

9.A

10.C

提示:直线 $ax+by+4=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 没有公共点,即相离,

所以 $\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$,所以 $a^2+b^2<4$,所以 $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}<1$,所以 $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}<\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}<1$,

所以点 (a,b) 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的内部,故有 2 个公共点.

11.C

提示:设 $P(x_0,y_0)$,则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$,即 $y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$.又因为 $F(-1,0)$,所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0\cdot(x_0+1)+y_0^2=\frac{1}{4}x_0^2+x_0+3=\frac{1}{4}(x_0+2)^2+2$.

又 $x_0\in[-2,2]$,所以 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP})\in[2,6]$,所以 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP})_{max}=6$.

12.A

提示:以线段 A_1A_2 为直径的圆是 $x^2+y^2=a^2$,直线 $bx-ay+2ab=0$ 与圆相切,所以圆心到直线的距离 $d=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$,整理为 $a^2=3b^2$,即 $a^2=3(a^2-c^2)\Rightarrow 2a^2=3c^2$,即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3}$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

二、填空题

13.中心

提示:依据椭圆的对称性.

14.$\frac{3}{11}$

提示:可设小椭圆的长轴长为 $2a$,焦距为 $2c$,由已知得 $\begin{cases}a+c=1\,700+1\,800,\\ a-c=200+1\,800,\end{cases}$ 所以 $a=2750$,$c=750$.

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{750}{2\,750}=\frac{3}{11}$.

15.9

提示:由已知得 $a=3$,

故 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=9$,

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=3$ 时,取等号.

故 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值为 9.

16.35

提示:根据对称性,得 $|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|+\cdots+|P_7F|=\frac{1}{2}\times 7\times 2a=\frac{1}{2}\times 7\times 10=35$.

三、解答题

17.**解**:椭圆方程可化为 $\frac{x^2}{m+3}+\frac{y^2}{m}=1$,则 $a^2=m+3$,$b^2=m$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.所以 $e=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $m=1$,所以 $a=2$,$b=1$,$c=\sqrt{3}$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,椭圆的长轴长为 4;短轴长为 2;焦点坐标分别为 $(-\sqrt{3},0)$,$(\sqrt{3},0)$;顶点坐标分别为 $(-2,0)$,$(2,0)$,$(0,1)$,$(0,-1)$.

18.**解**:由已知,得 $\frac{x^2}{\frac{m}{9}}+\frac{y^2}{\frac{m}{16}}=1$,

$a^2=\frac{m}{9}$,$b^2=\frac{m}{16}$,$c^2=\frac{7m}{144}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由面积公式,得

$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$,

解得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=12$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得

$4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos 60^\circ=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$,

即 $4c^2=4a^2-3\times 12$,所以 $b^2=a^2-c^2=9$,

即 $9=\frac{m}{16}$,解得 $m=144$.

由此可得 $a=\sqrt{\frac{m}{9}}=4$,$c=\sqrt{\frac{7m}{144}}=\sqrt{7}$,

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

19.**解**:(1)因为 $a=2$,$c=\sqrt{3}$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)$,$M(x,y)$,由中点坐标公式,

得 $\begin{cases}x=\frac{x_0+1}{2},\\ y=\frac{y_0+\frac{1}{2}}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_0=2x-1,\\ y_0=2y-\frac{1}{2}.\end{cases}$

又因为 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,所以 $\frac{(2x-1)^2}{4}+\left(2y-\frac{1}{2}\right)^2=1$,即为中点 M 的轨迹方程.

20.**解**:设所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

依题意,点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 的坐标满足方程组

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x+1,\end{cases}$

消去 y 并整理,得

$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0$,

所以 $x_1+x_2=-\frac{2a^2}{a^2+b^2}$,

$x_1x_2=\frac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}$.①

所以 $y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)=x_1+x_2+x_1x_2+1=\frac{b^2(1-a^2)}{a^2+b^2}$.②

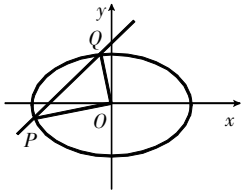
由 $OP\perp OQ\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow a^2+b^2=2a^2b^2$.③

又由 $|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow|PQ|^2=(1+k^2)\cdot(x_1-x_2)^2=(1+1^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=\frac{5}{2}$.④

由①③④,可得 $3b^4-8b^2+4=0\Rightarrow b^2=2$,或 $b^2=\frac{2}{3}\Rightarrow a^2=\frac{2}{3}$,或 $a^2=2$.

故所求椭圆的方程为

$\frac{3x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$,或 $\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}=1$.



(第 20 题图)

21.**解**:(1)将 $y=x+b$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$,消去 y,整理得 $3x^2+4bx+2b^2-2=0$.①

因为直线 $y=x+b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交于 A,B 两个不同的点,

所以 $\Delta=16b^2-12(2b^2-2)=24-8b^2>0$,解得 $-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}$.

所以 b 的取值范围为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.当 $b=1$ 时,方程①为 $3x^2+4x=0$.

解得 $x_1=0$,$x_2=-\frac{4}{3}$.所以 $y_1=1$,$y_2=-\frac{1}{3}$.

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

22.**解**:以两根桅杆的顶端 A,C 所在直线为 x 轴,线段 AC 的垂直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy,则 P 点在以 A,C 为焦点的椭圆上.设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2a=30$,$2c=15$,所以 $a=15$,$c=7.5$,$b^2=a^2-c^2=225-56.25=168.75$.

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{168.75}=1$.因为点 P 的纵坐标为 -7.5,代入椭圆方程可解得 $P(-12.25,-7.5)$,所以 P 到桅杆 AB 的距离为 $12.25-7.5=4.75$(米).

数学·北师大(选修2-1)

第8期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:一次项为x,且系数是负的,故开口方向是x轴的反方向,即向左.

2.B

提示:由$\frac{p}{2}=5$,得$p=10$,且焦点在y轴的正半轴上,所以$x^2=20y$.故选B.

3.A

提示:抛物线的标准方程是$x^2=4y$,所以准线方程为$y=-1$.

4.C

提示:圆的标准方程为$(x-3)^2+y^2=16$,圆心$(3,0)$到抛物线准线$x=-\frac{p}{2}$的距离为4,所以$-\frac{p}{2}=-1$,$p=2$.

5.C

提示:由抛物线的定义,得$4+\frac{p}{2}=4+2=6$.

6.B

提示:抛物线$y=ax^2(a>0)$的标准方程$x^2=\frac{1}{a}y$,所以$2p=\frac{1}{a}$,$p=\frac{1}{2a}$,所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}=4a$,所以$\frac{mn}{m+n}=\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{1}{4a}$.

7.C

提示:设抛物线的方程为$y^2=ax$或$x^2=by$,将点$(1,-2)$分别代入两个方程,可解得$a=4$,$b=-\frac{1}{2}$.

故过点$(1,-2)$的抛物线的标准方程是$y^2=4x$或$x^2=-\frac{1}{2}y$.

8.D

提示:过点A作准线的垂线,垂线与抛物线的交点即为所求点M.易知$y_M=y_A=2$,所以$x_M=2$,$M(2,2)$.

9.C

10.A

提示:由题意,$2|BF|=|AF|+|CF|$,所以$2\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)+\left(x_3+\frac{p}{2}\right)$,即$2x_2=x_1+x_3$,所以$x_1,x_2,x_3$成等差数列.

11.C

12.C

二、填空题

13.$y=8x-15$

提示:显然斜率不存在时的直线不符合题意.设直线斜率为k,则直线方程为$y-1=k(x-2)$,

① 由$\begin{cases}y-1=k(x-2),\\y^2=16x,\end{cases}$消去$x$得$ky^2-16y+16(1-2k)=0$,所以$y_1+y_2=\frac{16}{k}=2$($y_1$,$y_2$分别是$A$,$B$的纵坐标),所以$k=8$,代入①得$y=8x-15$.

14.2

提示:由于点$M(2,4)$恰好在抛物线$y^2=8x$上,所以经过点M且与抛物线只有一个公共点的直线有两条,其中一条是过点M所作的斜率不为0的直线(可视为抛物线的一条切线),另一条是过点M且与抛物线的对称轴(x轴)平行的直线.

15.$(y-2)^2=x-2$

提示:设$Q(x,y)$,则$P(2-x,2-y)$.又点P在抛物线$y^2=-x$上,所以$(2-y)^2=-(2-x)$.化简,得点Q的轨迹方程是$(y-2)^2=x-2$.

16.相切

提示:设MF的中点为$N(x_1,y_1)$,$M\left(\frac{y^2}{2p},y\right)$.

因为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以$x_1=\frac{p^2+y^2}{4p}$.

由抛物线的定义,知$|MF|=\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{y^2+p^2}{2p}$.所以$\frac{|MF|}{2}=x_1$,即圆心到$y$轴的距离等于半径长,故这个圆与$y$轴相切.

三、解答题

17.**解**:由题意,可设C的标准方程为$x^2=-2py(p>0)$.

将点$M(\sqrt{3},-2\sqrt{3})$代入,

解得$p=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以C的标准方程为$x^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}y$.

18.**解**:设$M(x_0,y_0)$,则$x_0+\frac{p}{2}=10$,$|y_0|=6$.代入$y_0^2=2px_0$中,解得$\begin{cases}x_0=9,\\p=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=1,\\p=18.\end{cases}$

所以点M的坐标为$(9,\pm6)$或$(1,\pm6)$.

19.**解**:由$\begin{cases}y=2x,\\y^2=2px,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{p}{2},\\y=p,\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$

所以点A为$\left(\frac{p}{2},p\right)$.

因为$OB\perp OA$,

所以OB的方程为$y=-\frac{1}{2}x$.

由$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\y^2=2px,\end{cases}$得$\begin{cases}x=8p,\\y=-4p,\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$

所以点B为$(8p,-4p)$.

故$|AB|=\sqrt{\left(8p-\frac{p}{2}\right)^2+(-4p-p)^2}=5\sqrt{13}$,

得$p=\pm2$.

故所求抛物线的方程为$y^2=\pm4x$.

20.**解**:(1)由抛物线的定义,知点P的轨迹E是焦点为$F(1,0)$的抛物线,其方程为$y^2=4x$.

(2)直线l的方程为$y=x-1$,代入$y^2=4x$中并消去x,得$y^2-4y-4=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-4$.所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4^2-4\times(-4)}=4\sqrt{2}$.

所以$\triangle AOB$的面积$S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

21.**解**:(1)由题意可设抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$,则其准线方程为$x=-\frac{p}{2}$.

因为点$P(4,m)$到焦点的距离为6,所以结合抛物线的定义,得$4+\frac{p}{2}=6$,解得$p=4$.

所以抛物线C的方程为$y^2=8x$.

(2)由$\begin{cases}y^2=8x,\\y=kx-2,\end{cases}$消去$y$,

得$k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为C与直线$y=kx-2$相交于不同的两点,

所以$k\neq0$,且$\Delta=(4k+8)^2-4k^2\cdot4>0$,

解得$k>-1$且$k\neq0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\frac{4k+8}{k^2}$.

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k+4}{k^2}=2$,解得$k=2$,或$k=-1$(舍去).所以$k$的值为2.

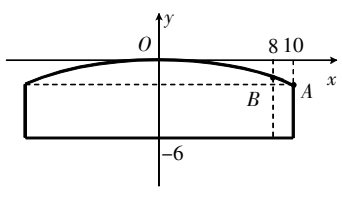
22.**解**:建立如图所示平面直角坐标系,设抛物线的方程为$x^2=ay$.

因为点$A(10,-2)$在抛物线上,所以$10^2=-2a$,

解得$a=-50$.所以抛物线的方程为$x^2=-50y$.

当$x=8$时,$y=-\frac{1}{50}\times8^2=-1.28$.所以点$B$离水面的高度为$6+(-1.28)=4.72<5$,所以该货船无法直接通过.

又$5-4.72=0.28$(m),$0.28\div0.04=7$,而$150\times7=1050$(t)>1000t,所以用多装货物的方法也无法通过.



(第22题图)