数学·人教A(选修2-1)

第1期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

2.A

3.C

提示:命题“若p,则q”的逆否命题是“若$\neg q$,则$\neg p$”,故选C.

4.C

提示:原命题与其逆否命题等价,否命题与逆命题等价,故选C.

5.D

提示:逆命题的逆否命题是原命题的否命题.

6.A

提示:“$x>e$”的必要不充分条件,即由“$x>e$”可以推出的结论.因为$x>e>1$,所以$x>1$,故A正确.

7.B

提示:若$f(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{3}$对称,则$2\times\frac{\pi}{3}+\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\theta=-\frac{\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,此时$\theta=-\frac{\pi}{6}$不一定成立,反之则成立.故“$f(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{3}$对称”是“$\theta=-\frac{\pi}{6}$”的必要不充分条件.

8.D

提示:因为集合$B=\{x|x\geqslant1\}$,$x\notin B$,所以$x\in\{x|x<1\}$.

又$x\in A$,所以$x\in\{x|x<1\}\cap\{x|x>-1\}=\{x|-1<x<1\}$.故选D.

9.A

10.A

提示:根据条件画出关系图,可知选A.

11.C

提示:若函数$f(x)$有两个零点,由$y=2^x-a$是增函数,$y=-x+a$是减函数,可知$f(x)$在$x\leqslant1$和$x>1$上各有一个零点.所以$\begin{cases}2-a\geqslant0,\\a>0,\\-1+a>0,\end{cases}$解得$a\in(1,2]$.观察各选项,可知A是必要不充分条件,B是充要条件,C是充分不必要条件,D是既不充分也不必要条件.故选C.

12.B

提示:若$a\leqslant1,b\leqslant1$,则不一定能推出$a+b\leqslant1,a+b\neq2,a^2+b^2\leqslant2,ab\leqslant1$;但一定能推出$a+b\leqslant2,a^3+b^3\leqslant2$.由原命题与其逆否命题是等价命题,可知能推出“$a,b$中至少有一个大于1”的条件有$a+b>2,a^3+b^3>2$,共2个.

二、填空题

13.若一个三角形是直角三角形,这个三角形的两个锐角互余

14.假命题

提示:原命题的逆命题是假命题,所以其否命题也是假命题.

15.否

提示:设命题A为:若p,则q.从而有:

A的逆命题:若q,则p;

B:若$\neg p$,则$\neg q$;

C:若$\neg q$,则$\neg p$.

所以C是A的逆命题的否命题.

16.①③

三、解答题

17.**解**:(1)若一个函数是奇函数,则该函数的图象关于直线$y=x$对称,假命题.

(2)若一个数是实数,则这个数的四次方是非负数,真命题.

(3)若$abc=0$,则$a=0$,或$b=0$,或$c=0$,真命题.

18.**解**:(1)逆否命题为:a是平面α内的一条直线,b是α外的一条直线,c是直线b在α上的射影,若a不垂直于c,则a不垂直于b.因为原命题是真命题,所以逆否命题也是真命题.

(2)逆命题为:a是平面α内的一条直线,b是α外的一条直线,c是直线b在α上的射影,若$a\perp c$,则$a\perp b$.

逆命题是真命题,证明如下:

因为c是直线b在α上的射影,所以过直线b上任意一点A作$AB\perp c$于B,则$AB\perp$平面α,所以$AB\perp a$.又$a\perp c$,且$AB\cap c=B$,所以a垂直于b与c所在的平面.所以$a\perp b$.

19.**证明**:充分性:如果$\triangle ABC$为等边三角形,那么$a=b=c$.所以$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

必要性:如果$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,那么$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$.

所以$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.所以$a-b=0,b-c=0,c-a=0$.所以$a=b=c$.

20.**解**:(1)因为$f(x)$是周期函数$\nRightarrow f(x)$是正弦函数,但$f(x)$是正弦函数$\Rightarrow f(x)$是周期函数,所以p是q的必要不充分条件.

(2)因为直角三角形不一定是等腰三角形,而等腰三角形也不一定是直角三角形,所以p既不是q的充分条件,也不是q的必要条件.

(3)因为矩形的对角线互相平分,而对角线互相平分的四边形是平行四边形,但不一定是矩形,所以p是q的充分不必要条件.

(4)圆$x^2+y^2=r^2$与直线$ax+by+c=0$相切$\Leftrightarrow|r|=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow c^2=(a^2+b^2)r^2$,所以$p$是$q$的充要条件.

21.**解**:$p:-x^2+7x+8\geqslant0\Leftrightarrow x^2-7x-8\leqslant0\Leftrightarrow-1\leqslant x\leqslant8$;

$q:x^2-2x+1-4m^2\leqslant0\Leftrightarrow1-2m\leqslant x\leqslant1+2m$.

(1)若p是q的充分不必要条件,则$[-1,8]\subsetneqq[1-2m,1+2m]$.

所以$\begin{cases}m>0,\\1-2m\leqslant-1,\\1+2m\geqslant8.\end{cases}$解得$m\geqslant\frac{7}{2}$.

所以实数m的取值范围为$\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$.

(2)若“$\neg p$”是“$\neg q$”的充分不必要条件,则q是p的充分不必要条件.

所以$[1-2m,1+2m]\subsetneqq[-1,8]$,

即$\begin{cases}m>0,\\1-2m\geqslant-1,\\1+2m\leqslant8.\end{cases}$解得$0<m\leqslant1$.

所以实数m的取值范围为$(0,1]$.

22.**解**:因为x_1,x_2是方程$x^2-mx-2=0$的两个实根,所以$x_1+x_2=m,x_1x_2=-2$.

所以$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{m^2+8}$.

所以当$m\in[-1,1]$时,$|x_1-x_2|_{\max}=3$.

由不等式$a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|$对任意实数$m\in[-1,1]$恒成立,得$a^2-5a-3\geqslant3$,解得$a\leqslant-1$或$a\geqslant6$.

所以p为真命题时,$a\leqslant-1$或$a\geqslant6$.

对于不等式$ax^2+2x-1>0$,当$a>0$时,显然有解;当$a=0$时,由$2x-1>0$,可知有解;当$a<0$时,由不等式有解,得$\Delta=4+4a>0$,解得$-1<a<0$.所以q为真命题时,$a>-1$.

所以q为假命题时,$a\leqslant-1$.

综上,实数a的取值范围为$(-\infty,-1]$.

数学·人教A(选修2-1)

第2期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

2.A

3.D

4.B

提示:由已知,得p真q假.

5.A

提示:若$p\wedge q$为真命题,则p,q都是真命题.所以$p\vee q$为真命题.反之,则不一定成立,故选A.

6.B

提示:③为假.

7.B

提示:"存在"的否定是"所有".

8.B

9.A

提示:$\neg p$:甲没有降落在指定范围,$\neg q$:乙没有降落在指定范围.所以至少有一位学员没有降落在指定范围的事件为$(\neg p)\vee(\neg q)$.

10.C

提示:分以下几类讨论:(1)若p真q真,则"$\neg p$","$\neg q$"为假命题,"$p\vee q$","$p\wedge q$"为真命题,$a=b=2$;(2)若p假q假,则"$\neg p$","$\neg q$"为真,"$p\vee q$","$p\wedge q$"为假,$a=b=2$;(3)若p,q中一真一假,不妨以p真q假为例,则"$\neg p$","$p\wedge q$"为假,"$\neg q$","$p\vee q$"为真,$a=b=2$.

11.D

12.A

提示:对A的否定为"对任意偶数$2n$都不是7的倍数",是假命题.对B的否定为"在平面内任意一个三角形的内角和都不大于180°",是真命题.对C的否定为"有些一元二次方程在区间$(-1,1)$内没有近似解",是真命题.对D的否定是存在两个向量的和的模不小于这两个向量模的和,是真命题.

二、填空题

13.(1)$p_1\wedge p_2$;

(2)$(\neg p_1)\wedge(\neg p_2)$;

(3)$p_1\wedge(\neg p_2)$,或$p_2\wedge(\neg p_1)$;

(4)$p_1\vee p_2$

14.真

提示:直线$y=2x$与直线$x+2y=0$的斜率分别为$k_1=2$,$k_2=-\frac{1}{2}$,所以$k_1k_2=-1$,即两直线垂直,所以命题p为真命题;正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中直线AD_1和B_1C是异面直线,在平面$ABCD$上的射影分别为AD,BC,且$AD\parallel BC$,所以命题q为真命题,所以命题$p\wedge q$为真命题.

15.平行四边形不一定是菱形

提示:p:"平行四边形一定是菱形"是假命题,这里"一定是"的否定是用"一定不是"还是"不一定是"?若为"平行四边形一定不是菱形",仍为假命题,与真值表相违,故原命题的"$\neg p$"为"平行四边形不一定是菱形",是一个真命题.

16.$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

提示:因为$x_1\in[-1,3]$时,$f(x_1)\in[1,10]$,

$x_2\in[-1,3]$时,$g(x_2)\in\left[\frac{1}{2}-m,8-m\right]$,

所以只需$1\geqslant\frac{1}{2}-m$,解得$m\geqslant-\frac{1}{2}$.

三、解答题

17.**解:**(1)"函数$y=1-3x^2$是单调函数或是偶函数",真命题.

(2)"点$(1,2)$在直线$2x+y-4=0$上且不在圆$x^2+y^2-2x+4y+3=0$上",真命题.

18.**解:**若p为真命题,则$1\in\{x|x^2<a\}$,故$1^2<a$,即$a>1$;若q为真命题,则$2\in\{x|x^2<a\}$,即$a>4$.

(1)若"$p\wedge q$"为真命题,则p真q真,

故$a>1$且$a>4$,即$a>4$.

所以实数a的取值范围是$(4,+\infty)$.

(2)若"$p\vee q$"为真命题,

则$a>1$或$a>4$,即$a>1$.

所以实数a的取值范围是$(1,+\infty)$.

19.**解:**$\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$\lg(ax^2+2x+1)$有意义,

即对一切$x\in\mathbf{R}$,$ax^2+2x+1>0$恒成立.

又$a=0$时,不合题意,

所以$\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$解得$a>1$.

所以实数a的取值范围是$(1,+\infty)$.

20.**解:**因为$2\in\{x\,\|\,x-a|>1\}$,所以$|2-a|>1$,

所以p:$a>3$或$a<1$,

因为q:曲线$y=x^2+(2a-3)x+1$与x轴交于不同的两点,

所以$\Delta>0$,即$(2a-3)^2-4>0$,

所以q:$a<\frac{1}{2}$或$a>\frac{5}{2}$,

由$p\vee q$为真命题,$p\wedge q$为假命题,知p,q一真一假,若p真q假,则$\frac{1}{2}\leqslant a<1$;若p假q真,则$\frac{5}{2}<a\leqslant3$.

所以实数a的取值范围是

$\left\{a\,\middle|\,\frac{5}{2}<a\leqslant3,\text{或}\frac{1}{2}\leqslant a<1\right\}$.

21.**解:**对于①,$2^{-x^2+ax-\frac{25}{4}}>1$,即$-x^2+ax-\frac{25}{4}>0$,故$x^2-ax+\frac{25}{4}<0$,要使不等式的解集为空集,$\Delta=a^2-25\leqslant0$,解得$-5\leqslant a\leqslant5$.

对于②,当$a=3$时,不等式的解集为$\{x|x>1\}$,不是空集;当$a\neq3$时,要使不等式$(a-3)x^2+(a-2)x-1>0$的解集为空集.

则$\begin{cases}a-3<0,\\ (a-2)^2+4(a-3)\leqslant0,\end{cases}$

解得$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2\sqrt{2}$.

对于③,因为$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=2$,

当且仅当$x^2=1$,即$x=\pm1$时取等号.

所以不等式$a>x^2+\frac{1}{x^2}$的解集为空集时,$a\leqslant2$.

因此,当三个不等式的解集都为空集时,$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2$.

所以要使三个不等式至多有两个不等式的解集为空集,则实数a的取值范围是$\{a|a<-2\sqrt{2}$,或$a>2\}$.

22.**解:**①②④是F函数.理由如下:

对于①,显然m是任意正数时,都有$0\leqslant m|x|$,$f(x)=0$是F函数;

对于②,显然$m\geqslant2$时,都有$|2x|\leqslant m|x|$,$f(x)=2x$是F函数;

对于③,当$x=0$时,$|f(0)|=\sqrt{2}$,不可能有$|f(0)|\leqslant m|0|=0$,故$f(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$不是$F$函数;

对于④,要使$|f(x)|\leqslant m|x|$成立,即$\left|\frac{x}{x^2+x+1}\right|\leqslant m|x|$,

当$x=0$时,m可取任意正数;

当$x\neq0$时,只需m大于等于$\frac{1}{|x^2+x+1|}$的最大值,

因为$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,所以$m\geqslant\frac{4}{3}$,

因此,当$m\geqslant\frac{4}{3}$时,$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$是F函数.

数学·人教A(选修2-1)

第3期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:①,②,③,⑤是命题,④不是.

2.B

提示:因为命题中含存在量词"有且只有一个",所以是特称命题.

3.D

4.A

5.B

提示:由$a\geqslant b\Rightarrow c>d$可得$c\leqslant d\Rightarrow a<b$,又$a<b\Rightarrow e\leqslant f$,所以$c\leqslant d\Rightarrow e\leqslant f$;而$e\leqslant f\Rightarrow c\leqslant d$显然不成立,故"$c\leqslant d$"是"$e\leqslant f$"的充分不必要条件.

6.A

提示:$\left|\theta-\frac{\pi}{12}\right|<\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin\theta<\frac{1}{2}$,但$\theta=0$,$\sin\theta<\frac{1}{2}$,不满足$\left|\theta-\frac{\pi}{12}\right|<\frac{\pi}{12}$,所以是充分不必要条件,选A.

7.B

提示:因为$\neg p$是真命题,所以p是假命题.又$p\vee q$是真命题,所以q一定是真命题.故选B.

8.D

提示:由已知,得p真q假.故选D.

9.A

提示:因为$P(1)$是假命题,

所以$1+2-m\leqslant 0$,解得$m\geqslant 3$.

又因为$P(2)$是真命题,

所以$4+4-m>0$,解得$m<8$.

故$3\leqslant m<8$.

10.D

提示:由于甲不知,所以乙丙一个优秀一个良好,因此乙知道丙,就知道自己成绩,同样丁知道甲成绩,就知道自己成绩,故选D.

11.B

提示:注意二次项系数为零也可以.

12.B

提示:直线$m\perp l$,但未说明$m\subset\alpha$,故①不是$m\perp\beta$的充分条件;

根据"垂直于同一个平面的两平面的交线垂直于这个平面",可得$m\perp\beta$,故②是$m\perp\beta$的充分条件;

垂直于同一个平面的两平面平行或相交,当两平面平行时,根据$m\perp\alpha$可推出$m\perp\beta$;当两平面相交时,根据$m\perp\alpha$推不出$m\perp\beta$,故③不是$m\perp\beta$的充分条件;

根据"垂直于同一条直线的两平面平行",可得$\alpha/\!/\beta$,又根据"两平面平行,垂直于一个平面的直线垂直于另一个平面",可得$m\perp\beta$,故④是$m\perp\beta$的充分条件.

二、填空题

13.$\forall x\leqslant 0,x^3\leqslant 0$

14.3

提示:由$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$,得$a_{n+1}<a_n$,所以数列$\{a_n\}$为递减数列,故原命题是真命题,其逆否命题为真命题.易知原命题的逆命题为真命题,所以其否命题也为真命题.

15.6

提示:因为$x^2-x+1>0$,所以原不等式化为$x^2-ax+2<3x^2-3x+3$,即$2x^2+(a-3)x+1>0$.

因为$\forall x\in\mathbf{R}$时,$2x^2+(a-3)x+1>0$恒成立,

所以$\Delta=(a-3)^2-8<0$.

所以$3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}$,

所以$a_1+a_2=6$.

16.①②③

提示:①"$k=1$"可以推出"函数$y=\cos^2kx-\sin^2kx$的最小正周期为π",但是函数$y=\cos^2kx-\sin^2kx$的最小正周期为π,即$y=\cos 2kx$,$T=\frac{2\pi}{|2k|}=\pi$,$k=\pm1$;

②"$a=3$"不能推出"直线$ax+2y+3a=0$与直线$3x+(a-1)y=a-7$相互垂直",反之垂直推出$a=\frac{2}{5}$;

③函数$y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$,令$\sqrt{x^2+3}=t$,$t\geqslant\sqrt{3}$,

$y_{\min}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题

17.**解**:逆命题:已知a,b,c,d是实数,若$a+c=b+d$,则$a=b,c=d$.假命题.

否命题:已知a,b,c,d是实数,若$a\neq b$或$c\neq d$,则$a+c\neq b+d$.假命题.

逆否命题:已知a,b,c,d是实数,若$a+c\neq b+d$,则$a\neq b$或$c\neq d$.真命题.

18.**解**:(1)$\neg p$:存在一个末位数字是0或5的整数不能被5整除,假命题.

(2)$\neg p$:存在一个非负数的平方不是正数,真命题.

(3)$\neg p$:任意三角形的内角和都等于180°,真命题.

(4)$\neg p$:所有的四边形都有外接圆,假命题.

(5)$\neg p$:所有梯形的对角线都不互相平分,真命题.

19.**证明**:若$a^2-b^2=1$,

则$a^4-b^4-2b^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)-2b^2=a^2+b^2-2b^2=a^2-b^2=1$.

所以$a^2-b^2=1$是$a^4-b^4-2b^2=1$的充分条件.

$a^2-b^2=1$是$a^4-b^4-2b^2=1$的必要条件,

证明如下:

若$a^4-b^4-2b^2=1$,则$a^4-b^4-2b^2-1=0$,即$a^4-(b^2+1)^2=0$,

所以$(a^2+b^2+1)(a^2-b^2-1)=0$.

因为$a^2+b^2+1\neq 0$,所以$a^2-b^2=1$.所以$a^2-b^2=1$是$a^4-b^4-2b^2=1$的必要条件.

20.**解**:(1)由p得$-1<x<5$.

当$m=1$时,q:$1<x<3$.

由"$p\wedge q$"是假命题,且"$\neg p$"是假命题,知p真q假.

由$\begin{cases}-1<x<5,\\ x\leqslant 1\text{或}x\geqslant 3,\end{cases}$

得$-1<x\leqslant 1$或$3\leqslant x<5$.

故实数x的取值范围是$(-1,1]\cup[3,5)$.

(2)因为$\neg p$是$\neg q$的充分不必要条件,

所以p是q的必要不充分条件.

记$A=\{x|-1<x<5\}$,$B=\{x|m<x<2m+1\}$,则$B\subsetneqq A$.

①当$B=\varnothing$时,有$m\geqslant 2m+1$,解得$m\leqslant -1$,此时满足条件.

②当$B\neq\varnothing$,即$m<2m+1$,$m>-1$时,由$B\subsetneqq A$,得$2m+1\leqslant 5$,解得$-1<m\leqslant 2$.

综上,得实数m的取值范围是$(-\infty,2]$.

21.**解**:(1)由$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$,得$-3\leqslant a\leqslant 5$,因此$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的充要条件是$\{a|-3\leqslant a\leqslant 5\}$.

(2)求实数a的一个值,使它成为$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个充分而不必要条件,就是在集合$\{a|-3\leqslant a\leqslant 5\}$中取一个值,如取$a=0$,此时必有$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$;反之,$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$不一定有$a=0$,故$a=0$是$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个充分不必要条件.

(3)求实数a的取值范围,使它成为$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个必要不充分条件就是另求一个集合,使$\{a|-3\leqslant a\leqslant 5\}$是它的一个真子集.

如果$\{a|a\leqslant 5\}$,则不一定有$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$,但是$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$时,必有$a\leqslant 5$,故$\{a|a\leqslant 5\}$是$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个必要不充分条件.

22.**解**:(1)因为$\forall x,y\in\mathbf{R}$,$f(x+y)-f(y)=(x+2y+1)x$,令$x=1,y=0$,得$f(1)-f(0)=2$,

又因为$f(1)=0$,

所以$f(0)=-2$.

(2)令$y=0$,得$f(x)-f(0)=(x+1)x$.

所以$f(x)=x^2+x-2$,

所以$f(x)+2<\log_a x$可化为$x^2+x<\log_a x$.

即$\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$,$x^2+x<\log_a x$,

又因为当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$时,

$x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

当$a>1$时,$\log_a x<0\left(x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\right)$不合题意;

当$0<a<1$时,$\log_a x\geqslant\log_a\frac{1}{2}$,

所以$\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$,$x^2+x<\log_a x$恒成立等价于$\begin{cases}\log_a\frac{1}{2}>\frac{3}{4},\\ 0<a<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^{\frac{3}{4}}>\frac{1}{2},\\ 0<a<1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\sqrt[3]{4}}{4}<a<1$,

即所求a的取值范围是$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{4},1\right)$.

数学·人教A(选修2-1)
第4期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

2.C

3.D

4.C

提示：由 $ax^2+by^2=1$，得 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{a}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{b}}=1$.

因为焦点在 x 轴上，所以 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>0$，

所以 $0<a<b$.

5.C

提示：令 $f(x,y)=y^2-xy-2$，则 $f(-x,-y)=y^2-xy-2=f(x,y)$，所以函数 $f(x,y)$ 关于原点对称.

6.D

提示：$c=2,b=1,a=\sqrt{5}$，$e=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

7.C

提示：方程化为标准方程 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{a}=1$，因为椭圆焦点在 x 轴，所以 $7>a$.直线过定点 $(0,1)$，要使直线与椭圆恒有公共点，需 $(0,1)$ 在椭圆内或椭圆上，则 $a\cdot 0+7\times 1\leqslant 7a$，即 $a\geqslant 1$.故选 C.

8.D

9.A

10.C

提示：直线 $ax+by+4=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 没有公共点，即相离，

所以 $\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$，所以 $a^2+b^2<4$，所以 $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}<1$，所以 $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{b^2}{4}<\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}<1$，

所以点 (a,b) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的内部，故有2个公共点.

11.C

提示：设 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即 $y_0^2=3-\dfrac{3x_0^2}{4}$.又因为 $F(-1,0)$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0\cdot(x_0+1)+y_0^2=\dfrac{1}{4}x_0^2+x_0+3=\dfrac{1}{4}(x_0+2)^2+2$.

又 $x_0\in[-2,2]$，所以 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP})\in[2,6]$，所以 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP})_{\max}=6$.

12.A

提示：以线段 A_1A_2 为直径的圆是 $x^2+y^2=a^2$，直线 $bx-ay+2ab=0$ 与圆相切，所以圆心到直线的距离 $d=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$，整理为 $a^2=3b^2$，即 $a^2=3(a^2-c^2)\Rightarrow 2a^2=3c^2$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

二、填空题

13.椭圆

提示：由条件可化简为 $PA+PB=4$，因为 $4>2=AB$，所以曲线 C 是椭圆.

14.$\dfrac{3}{11}$

提示：可设小椭圆的长轴长为 $2a$，焦距为 $2c$，由已知得 $\begin{cases}a+c=1\,700+1\,800,\\ a-c=200+1\,800,\end{cases}$ 所以 $a=2750,c=750$.

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{750}{2\,750}=\dfrac{3}{11}$.

15.9

提示：由已知得 $a=3$，

故 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=9$，

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=3$ 时，取等号.

故 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值为9.

16.④

提示：①③不符合曲线与方程概念中的条件(1)；②不满足曲线与方程概念中的条件(2)；只有④正确.

三、解答题

17.**解**：椭圆方程可化为 $\dfrac{x^2}{m+3}+\dfrac{y^2}{m}=1$，则 $a^2=m+3$，$b^2=m$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.所以 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{m+3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $m=1$，所以 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$.

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，椭圆的长轴长为4；短轴长为2；焦点坐标分别为 $(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$；顶点坐标分别为 $(-2,0)$，$(2,0)$，$(0,1)$，$(0,-1)$.

18.**解**：由椭圆的方程，

得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=20$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，$|F_1F_2|=2c=12$.

由余弦定理，得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos 60^\circ$，

即 $12^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1||PF_2|$.

因为 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$，

所以 $12^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$.

又因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a=20$，

所以 $12^2=20^2-3\cdot|PF_1||PF_2|\Rightarrow|PF_1||PF_2|=\dfrac{20^2-12^2}{3}=\dfrac{256}{3}$.

所以 $S=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{256}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$.

19.**解**：(1)因为 $a=2,c=\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$.

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)$，$M(x,y)$，由中点坐标公式，

得 $\begin{cases}x=\dfrac{x_0+1}{2},\\ y=\dfrac{y_0+\frac{1}{2}}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_0=2x-1,\\ y_0=2y-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

又因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $\dfrac{(2x-1)^2}{4}+\left(2y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$，即为中点 M 的轨迹方程.

20.**解**：设所求椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

依题意，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 的坐标满足方程组

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x+1,\end{cases}$

消去 y 并整理，得

$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}$，

$x_1x_2=\dfrac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}$.①

所以 $y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)=x_1+x_2+x_1x_2+1=\dfrac{b^2(1-a^2)}{a^2+b^2}$.②

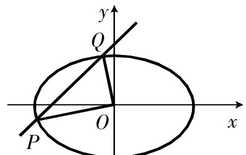
由 $OP\perp OQ\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow a^2+b^2=2a^2b^2$.③

又由 $|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow|PQ|^2=(1+k^2)\cdot(x_1-x_2)^2=(1+1^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=\dfrac{5}{2}$.④

由①③④，可得 $3b^4-8b^2+4=0\Rightarrow b^2=2$，或 $b^2=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a^2=\dfrac{2}{3}$，或 $a^2=2$.

故所求椭圆的方程为

$\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，或 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3y^2}{2}=1$.



(第20题图)

21.**解**：(1)将 $y=x+b$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，消去 y，整理得 $3x^2+4bx+2b^2-2=0$.①

因为直线 $y=x+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交于 A,B 两个不同的点，

所以 $\Delta=16b^2-12(2b^2-2)=24-8b^2>0$，解得 $-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}$.

所以 b 的取值范围为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.当 $b=1$ 时，方程①为 $3x^2+4x=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=-\dfrac{4}{3}$.所以 $y_1=1$，$y_2=-\dfrac{1}{3}$.

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

22.**解**：设 $P(x,y)$，$B(m,n)$.

因为 $|BP|:|PA|=1:2$，

所以 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}$.

所以 $(x-m,y-n)=\dfrac{1}{2}(3-x,1-y)$，

即 $\begin{cases}m=\dfrac{3x-3}{2},\\ n=\dfrac{3y-1}{2}.\end{cases}$

又因为 $B(m,n)$ 在曲线 $y^2=x+1$ 上，

所以 $\left(\dfrac{3y-1}{2}\right)^2=\dfrac{3x-3}{2}+1$，

即 $3y^2-2y-2x+1=0$.

所以点 P 的轨迹方程为 $3y^2-2y-2x+1=0$.