答案页第2期
数学·人教A(选修2-1)
第5期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示：由题意，两定圆的圆心坐标为$O_1(0,0)$，$O_2(4,0)$，设动圆圆心为O，动圆半径为r，则$|OO_1|=r+1$，$|OO_2|=r+2$，所以$|OO_2|-|OO_1|=1<|O_1O_2|=4$，故动圆圆心的轨迹为双曲线的一支.

2.B

3.C

4.A

提示：由题意知$\frac{\sqrt{4+m^2}}{2}=\sqrt{3}$，解得$m=2\sqrt{2}$.

5.A

6.B

提示：因为方程$\frac{x^2}{k+2}-\frac{y^2}{5-k}=1$表示双曲线，所以$(k+2)\cdot(5-k)>0$，所以$(k+2)\cdot(k-5)<0$，解得$-2<k<5$.

7.B

8.A

提示：双曲线$mx^2+y^2=1$化为标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+y^2=1$，所以$\frac{1}{m}<0$，且焦点在$y$轴上，$a^2=1$，$b^2=-\frac{1}{m}$.又因为虚轴长是实轴长的2倍，所以$2b=2\times2a$，所以$b^2=4a^2$，即$-\frac{1}{m}=4\times1$，所以$m=-\frac{1}{4}$.

9.C

提示：因为$a=2$，$c=4$，所以$a+c=6$.当点P在左支时，有2个点满足题意；当点P在右支时，有1个点满足题意，共3个.

10.B

提示：设双曲线的一条渐近线为$y=\frac{b}{a}x(a>0,b>0)$，即$bx-ay=0$.

因为圆$x^2+y^2-4y+3=0$的圆心为$(0,2)$，半径$r=1$，且该圆与渐近线$bx-ay=0$相切，所以$\frac{|2a|}{\sqrt{b^2+a^2}}=1$，得$3a^2=b^2$.

所以该双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$.

11.B

提示：设$|PF_1|>|PF_2|$.

由$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{n+2},\\ |PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{n},\end{cases}$

解得$\begin{cases}|PF_1|=\sqrt{n+2}+\sqrt{n},\\ |PF_2|=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}.\end{cases}$

又$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{n+1}$，

所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4(n+1)=|F_1F_2|^2$.

所以$\triangle PF_1F_2$是直角三角形，且$\angle F_1PF_2=90°$.

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=1$.

12.C

提示：由题意，C_2的焦点为$(\pm\sqrt{5},0)$，渐近线方程为$y=\pm2x$，AB为圆的直径，即$|AB|=2a$.

所以$a^2-b^2=5$. ①

设C_1与渐近线：$y=2x$在第一象限的交点为$(x,2x)$，代入C_1的方程，得$x^2=\frac{a^2b^2}{b^2+4a^2}$. ②

由对称性知直线$y=2x$被C_1截得的弦长等于$2\sqrt{5}x$，则$2\sqrt{5}x=\frac{2a}{3}$，解得$x=\frac{a}{3\sqrt{5}}$. ③

由②③，得$a^2=11b^2$.代入①式，解得$a^2=\frac{11}{2}$，$b^2=\frac{1}{2}$.故选C.

二、填空题

13.$2\sqrt{3}$

14.$\sqrt{3}+1$

提示：连接AF_1，因为F_1F_2为圆O的直径，所以$\triangle AF_1F_2$为直角三角形.因为$\triangle AF_2B$为等边三角形，所以$\angle AF_2F_1=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

又$|F_1F_2|=2c$，

所以$|AF_1|=c$，$|AF_2|=\sqrt{3}c$.由双曲线的定义知$\sqrt{3}c-c=2a$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

15.$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{8}=1$

提示：依题意，设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda$，将点$(2,\sqrt{3})$的坐标代入，解得$\lambda=-2$.所以双曲线$C$的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=-2$，即$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{8}=1$.

16.$4\sqrt{6}$

提示：联立方程，利用弦长公式可得.

三、解答题

17.**解**：将$16y^2-9x^2=144$化为标准方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$，则顶点坐标为$(0,3)$和$(0,-3)$，虚轴长$2b=8$，焦点坐标为$(0,5)$和$(0,-5)$，离心率$e=\frac{5}{3}$.

18.**解**：(1)由题意设双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6-a^2}=1$，把点$(-5,2)$代入，得$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{6-a^2}=1$，解得$a^2=5$.所以双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{5}-y^2=1$.

(2)设双曲线的方程为$mx^2-ny^2=1(mn>0)$.

因为点P_1,P_2在该双曲线上，所以$\begin{cases}9m-32n=1,\\ \frac{81}{16}m-25n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-\frac{1}{9},\\ n=-\frac{1}{16}.\end{cases}$故双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

19.**解**：椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$，可知椭圆的焦距为$8\sqrt{3}$.

当双曲线的焦点在x轴上时，

设标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则$\begin{cases}a^2+b^2=48,\\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=36,\\ b^2=12.\end{cases}$

所以双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$.

当双曲线的焦点在y轴上时，

设标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则$\begin{cases}a^2+b^2=48,\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=36.\end{cases}$

所以双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{36}=1$.

综上可知，双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$或$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{36}=1$.

20.**解**：设双曲线左焦点的坐标为$(-c,0)(c>0)$，将$x=-c$代入双曲线的方程，得M,N两点的坐标分别为$\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$和$\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$，

则圆的半径为$\frac{1}{2}|MN|=\frac{b^2}{a}$.

又以$|MN|$为直径的圆过右顶点，

故该圆半径为$a+c$，则$\frac{b^2}{a}=a+c$.

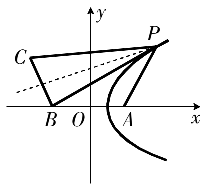
所以$\frac{c^2-a^2}{a}=a+c$，所以$c^2-ac-2a^2=0$，

所以$\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-2=0$，即$e^2-e-2=0$，

解得$e=-1$，或$e=2$.

又$e>1$，所以此双曲线的离心率$e=2$.

21.**解**：以AB所在的直线为x轴，AB的中点为坐标原点建立直角坐标系(如下图)，



(第21题图)

则$A(3,0)$，$B(-3,0)$，$C(-5,2\sqrt{3})$.

由于B,C同时发现信号，

故$|PB|=|PC|$.

所以P在线段BC的垂直平分线l上，易知l的方程为$x-\sqrt{3}y+7=0$.

又因为A,B发现信号的时间差为4s，所以$|PB|-|PA|=4$.

故P在$2a=4$，$2c=6$的双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的右支上，与$l$的方程联立，解得$x=8$，$y=5\sqrt{3}$，或$x=-\frac{32}{11}$，$y=\frac{15\sqrt{3}}{11}$.所以直线$l$与双曲线右支的交点为$(8,5\sqrt{3})$，此即为$P$地的位置.

22.**解**：(1)依题意，点P的轨迹是以M,N为焦点的双曲线的右支，故W的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1(x>0)$.

(2)当$AB\perp x$轴时，设直线AB的方程为$x=x_0$，则$A(x_0,\sqrt{x_0^2-2})$，$B(x_0,-\sqrt{x_0^2-2})$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$.

当AB与x轴不垂直时，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$y=kx+b$.

将直线AB的方程与W的方程联立并消去y，化简得$(1-k^2)x^2-2kbx-b^2-2=0$.

故$x_1+x_2=\frac{2kb}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{b^2+2}{k^2-1}$.

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$=x_1x_2+(kx_1+b)(kx_2+b)$

$=(1+k^2)x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$

$=\frac{2k^2+2}{k^2-1}=2+\frac{4}{k^2-1}$.

又$x_1x_2>0$，所以$k^2-1>0$.从而$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$.

综上可知$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为2.

数学·人教A(选修2-1)
第6期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:一次项为 x,且系数是负的,故开口方向是 x 轴的反方向,即向左.

2.B

提示:由 $\frac{p}{2}=5$,得 $p=10$,且焦点在 y 轴的正半轴上,所以 $x^2=20y$.故选 B.

3.A

提示:抛物线的标准方程是 $x^2=4y$,所以准线方程为 $y=-1$.

4.C

提示:抛物线只有一个顶点,离心率是1,没有中心对称性,这些性质与椭圆、双曲线的性质不相同.

5.C

提示:由抛物线的定义,得 $4+\frac{p}{2}=4+2=6$.

6.B

提示:抛物线 $y=ax^2(a>0)$的标准方程 $x^2=\frac{1}{a}y$,所以$2p=\frac{1}{a}$,$p=\frac{1}{2a}$,所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}=4a$,所以$\frac{mn}{m+n}=\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{1}{4a}$.

7.C

提示:设抛物线的方程为$y^2=ax$或$x^2=by$,将点$(1,-2)$分别代入两个方程,可解得$a=4$,$b=-\frac{1}{2}$.

故过点$(1,-2)$的抛物线的标准方程是$y^2=4x$或$x^2=-\frac{1}{2}y$.

8.D

提示:过点 A 作准线的垂线,垂线与抛物线的交点即为所求点 M.易知 $y_M=y_A=2$,所以 $x_M=2$,$M(2,2)$.

9.C

10.C

提示:抛物线$y^2=8x$的准线方程是$x=-2$,点$Q(-2,0)$.

设直线l的方程是$y=k(x+2)$,代入抛物线方程,得$k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$.

由题意知,当$k\neq0$时,$\Delta=(4k^2-8)^2-16k^4\geqslant0$,则$k^2\leqslant1$且$k\neq0$,即$-1\leqslant k<0$或$0<k\leqslant1$;当$k=0$时,也满足题意,所以$-1\leqslant k\leqslant1$.

11.C

12.C

提示:由题意,知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,圆的圆心为$\left(\frac{p}{2},0\right)$,即点$F$,半径为$p$,所以$|CD|=2p$.

若直线l的斜率不存在,则其方程为$x=\frac{p}{2}$,可得$|AB|=2p=|CD|$,不满足题意.

当直线l的斜率存在时,设其方程为$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.显然$k\neq0$.

由$\begin{cases}y=k\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$消去$y$并整理,得$x^2-\left(p+\frac{2p}{k^2}\right)x+\frac{p^2}{4}=0$.所以$x_1+x_2=p+\frac{2p}{k^2}$.

所以$|AB|=x_1+x_2+p=2p+\frac{2p}{k^2}$.

由$|AB|=2|CD|$,得$2p+\frac{2p}{k^2}=4p$.

解得$k=\pm1$.故选C.

二、填空题

13.$y=8x-15$

提示:显然斜率不存在时的直线不符合题意.设直线斜率为k,则直线方程为$y-1=k(x-2)$,

①由$\begin{cases}y-1=k(x-2),\\y^2=16x,\end{cases}$消去$x$得$ky^2-16y+16(1-2k)=0$,所以$y_1+y_2=\frac{16}{k}=2(y_1$,$y_2$分别是$A$,$B$的纵坐标),所以$k=8$,代入①得 $y=8x-15$.

14.2

提示:由于点$M(2,4)$恰好在抛物线$y^2=8x$上,所以经过点M且与抛物线只有一个公共点的直线有两条,其中一条是过点M所作的斜率不为0的直线(可视为抛物线的一条切线),另一条是过点M且与抛物线的对称轴(x轴)平行的直线.

15.$(y-2)^2=x-2$

提示:设$Q(x,y)$,则$P(2-x,2-y)$.又点P在抛物线$y^2=-x$上,所以$(2-y)^2=-(2-x)$.化简,得点Q的轨迹方程是$(y-2)^2=x-2$.

16.相切

提示:设MF的中点为$N(x_1,y_1)$,$M\left(\frac{y^2}{2p},y\right)$.

因为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以$x_1=\frac{p^2+y^2}{4p}$.

由抛物线的定义,知$|MF|=\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{y^2+p^2}{2p}$.所以$\frac{|MF|}{2}=x_1$,即圆心到$y$轴的距离等于半径长,故这个圆与$y$轴相切.

三、解答题

17.**解**:由题意,可设C的标准方程为$x^2=-2py(p>0)$.

将点$M(\sqrt{3},-2\sqrt{3})$代入,

解得$p=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以C的标准方程为$x^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}y$.

18.**解**:设$M(x_0,y_0)$,则$x_0+\frac{p}{2}=10$,$|y_0|=6$.代入$y_0^2=2px_0$中,解得$\begin{cases}x_0=9,\\p=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=1,\\p=18.\end{cases}$

所以点M的坐标为$(9,\pm6)$或$(1,\pm6)$.

19.**解**:由$\begin{cases}y=2x,\\y^2=2px,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{p}{2},\\y=p,\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$

所以点A为$\left(\frac{p}{2},p\right)$.

因为$OB\perp OA$,

所以OB的方程为$y=-\frac{1}{2}x$.

由$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\y^2=2px,\end{cases}$得$\begin{cases}x=8p,\\y=-4p,\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$

所以点B为$(8p,-4p)$.

故$|AB|=\sqrt{\left(8p-\frac{p}{2}\right)^2+(-4p-p)^2}=5\sqrt{13}$,

得$p=\pm2$.

故所求抛物线的方程为$y^2=\pm4x$.

20.**解**:(1)由抛物线的定义,知点P的轨迹E是焦点为$F(1,0)$的抛物线,其方程为$y^2=4x$.

(2)直线l的方程为$y=x-1$,代入$y^2=4x$中并消去x,得$y^2-4y-4=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-4$.所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4^2-4\times(-4)}=4\sqrt{2}$.

所以$\triangle AOB$的面积$S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

21.**解**:(1)由题意可设抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$,则其准线方程为$x=-\frac{p}{2}$.

因为点$P(4,m)$到焦点的距离为6,所以结合抛物线的定义,得$4+\frac{p}{2}=6$,解得$p=4$.

所以抛物线C的方程为$y^2=8x$.

(2)由$\begin{cases}y^2=8x,\\y=kx-2,\end{cases}$消去$y$,

得$k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为C与直线$y=kx-2$相交于不同的两点,

所以$k\neq0$,且$\Delta=(4k+8)^2-4k^2\cdot4>0$,

解得$k>-1$且$k\neq0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\frac{4k+8}{k^2}$.

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k+4}{k^2}=2$,解得$k=2$,或$k=-1$(舍去).所以$k$的值为2.

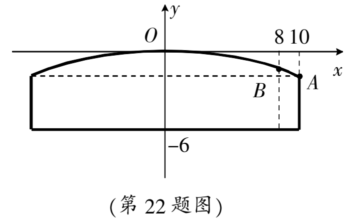
22.**解**:建立如图所示平面直角坐标系,设抛物线的方程为$x^2=ay$.

因为点$A(10,-2)$在抛物线上,所以$10^2=-2a$,

解得$a=-50$.所以抛物线的方程为$x^2=-50y$.

当$x=8$时,$y=-\frac{1}{50}\times8^2=-1.28$.所以点$B$离水面的高度为$6+(-1.28)=4.72<5$,所以该货船无法直接通过.

又$5-4.72=0.28(\mathrm{m})$,$0.28\div0.04=7$,而$150\times7=1050(\mathrm{t})>1000\mathrm{t}$,所以用多装货物的方法也无法通过.



(第22题图)

数学·人教A(选修2-1)

第7期

第2~3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D　2.A　3.D　4.D　5.B　6.B　7.D　8.C

9.B

提示:由 C_1 与 C_2 有公共的焦点,可得 $m^2-p^2=c^2,n^2+p^2=c^2$,故 $m^2+n^2=2c^2$.

又 $|MF_1|+|MF_2|=2m,|MF_1|-|MF_2|=2n$,解得 $|MF_1|=m+n,|MF_2|=m-n$.

所以 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=2(m^2+n^2)=4c^2=|F_1F_2|^2$.

所以 $\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{2}$.故选B.

10.D

提示:由椭圆的几何性质得 $|PF_1|\in[a-c,a+c]$, $|PF_1|+|PF_2|=2a$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=a^2$,

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时取等号.

$|PF_1|\cdot|PF_2|=|PF_1|(2a-|PF_1|)$
$=-|PF_1|^2+2a|PF_1|=-(|PF_1|-a)^2+a^2$
$\geqslant-c^2+a^2=b^2$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值与最小值之差为 $a^2-b^2=c^2$.

11.A

提示:由已知,得 $b=\frac{p}{2}$, $a=2\sqrt{2}$,

渐近线方程为 $y=\pm\frac{p}{4\sqrt{2}}x$.

根据直线 $y=kx-1$ 与一条渐近线平行,不妨取 $k=\frac{p}{4\sqrt{2}}$,则由 $\begin{cases}y=\frac{p}{4\sqrt{2}}x-1,\\ x^2=2py,\end{cases}$

可得 $x^2-\frac{p^2}{2\sqrt{2}}x+2p=0$.

所以 $\Delta=\left(-\frac{p^2}{2\sqrt{2}}\right)^2-8p=0$,解得 $p=4$.

12.B

提示:因为点 $Q\left(c,\frac{a}{2}\right)$ 在 C 的内部,

所以 $\frac{b^2}{a}>\frac{a}{2}\Rightarrow2b^2>a^2\Rightarrow a^2>2c^2\Rightarrow\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由椭圆定义,得 $|PF_1|+|PQ|=2a-|PF_2|+|PQ|$.

要使 $|PF_1|+|PQ|<5|F_1F_2|$ 恒成立,

则 $2a-|PF_2|+|PQ|<5\times2c$ 恒成立,

即 $|PQ|-|PF_2|<10c-2a$ 恒成立.

又 $|PQ|-|PF_2|\leqslant|QF_2|=\frac{a}{2}$,

所以 $\frac{a}{2}<10c-2a$,得 $\frac{c}{a}>\frac{1}{4}$.

所以离心率 e 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

二、填空题

13.33

提示:由 $||PF_1|-|PF_2||=16$,

得 $|PF_2|=1$,或 $|PF_2|=33$.

又 $|PF_2|\geqslant c-a=2$,得 $|PF_2|=33$.

14.$\sqrt{2}-1$

15.$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

16.①②④

提示:根据题意,动点 P 的轨迹是椭圆,其中 $a=2,c=1$,所以 $b^2=3$,椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,x\in[-2,2],y\in[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$. 对于①,$x^2+y^2=4$ 表示圆心在原点,半径为2的圆,且 $x\in[-2,2],y\in[-2,2]$,所以存在满足条件的点 P,①正确;对于②,$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 表示椭圆,且 $x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}],y\in[-2,2]$,所以存在满足条件的点 P,②正确;对于③,$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 表示双曲线,且 $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty),y\in\mathbf{R}$,所以不存在满足条件的点 P,③错误;对于④,$y^2=8x$ 表示抛物线,且 $x\in[0,+\infty),y\in\mathbf{R}$,所以存在满足条件的点 P,④正确.综上,正确的序号是①②④.

三、解答题

17.解:过点 P 作 PN 垂直直线 $y=-1$ 于 N.

依题意,得 $|PF|=|PN|$,

所以动点 P 的轨迹是以 $F(0,1)$ 为焦点,直线 $y=-1$ 为准线的抛物线,

所以点 P 的轨迹方程是 $x^2=4y$.

18.解:因为椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ 的长轴端点为 $(-\sqrt{10},0),(\sqrt{10},0)$,

所以双曲线的焦点为 $(\pm\sqrt{10},0)$.

由双曲线的渐近线方程为 $3x\pm4y=0$,

即 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{3}=0$,

设双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda>0)$,

变形,得 $\frac{x^2}{16\lambda}-\frac{y^2}{9\lambda}=1$,

由题意,可知 $16\lambda+9\lambda=10$,

解得 $\lambda=\frac{2}{5}$.

所以此双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{32}{5}}-\frac{y^2}{\frac{18}{5}}=1$.

19.解:(1)由已知,得 $c=2,2|F_1F_2|=|PF_1|+|PF_2|=8\Rightarrow2a=8$,所以 $a=4$.

所以 $b^2=a^2-c^2=12$.

所以此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos120°=|F_1F_2|^2=16$,

即 $(|PF_1|+|PF_2|)^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=16$.

又 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=48$.

所以 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin120°=12\sqrt{3}$.

20.解:联立 $y=k(x-1)$ 与 $x^2-y^2=4$ 并消去 y,

得 $(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0$,

所以 $\Delta=4k^4+4(1-k^2)(k^2+4)=4(4-3k^2)$.

(1)由直线 l 与双曲线有两个不同的交点,

得 $1-k^2\neq0$ 且 $\Delta>0$,

解得 $k\neq\pm1$ 且 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以实数 k 的取值范围是

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2)由直线 l 与双曲线有且只有一个交点,得

①$1-k^2=0$,解得 $k=\pm1$;

②$1-k^2\neq0$ 且 $\Delta=0$,解得 $k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以实数 k 的取值范围是

$\left\{\pm1,\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

21.解:由 $y^2=4x$,得 $p=2$,其准线方程为 $x=-1$,焦点 $F(1,0)$.设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

(1)由抛物线的定义,得 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}$,即 $4=x_1+1$,解得 $x_1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中,得 $y=\pm2\sqrt{3}$.所以点 A 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$ 或 $(3,-2\sqrt{3})$.

(2)直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,与抛物线方程联立并消去 y,

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

所以 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

由抛物线的定义,可知 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}=5$,解得 $k=\pm2$.

(3)设 $P(x,y)$,则点 P 到直线 $2x-y+4=0$ 的距离 $d=\frac{|2x-y+4|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\frac{y^2}{2}-y+4\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{5}}$.

所以当 $y=1$ 时,点 P 到直线 $2x-y+4=0$ 距离的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{10}$,此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{4},1\right)$.

22.(1)解:由题意,知椭圆离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$.

又 $2a+2c=4(\sqrt{2}+1)$,

解得 $a=2\sqrt{2},c=2$,

所以 $b^2=a^2-c^2=4$.

所以该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

所以椭圆的焦点坐标为 $(\pm2,0)$.

因为双曲线为等轴双曲线,且顶点是该椭圆的焦点,

所以该双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)证明:设点 $P(x_0,y_0)$,

则 $k_1=\frac{y_0}{x_0+2},k_2=\frac{y_0}{x_0-2}$,

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$.

又点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线上,

所以有 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{4}=1$,即 $y_0^2=x_0^2-4$,

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=1$.

(3)解:假设存在常数 λ,使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立.

由(2)知 $k_1\cdot k_2=1$,

则直线 AB 的方程为 $y=k_1(x+2)$,

直线 CD 的方程为 $y=\frac{1}{k_1}(x-2)$.

由方程组 $\begin{cases}y=k_1(x+2),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y,得

$(2k_1^2+1)x^2+8k_1^2x+8k_1^2-8=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{-8k_1^2}{2k_1^2+1},x_1x_2=\frac{8k_1^2-8}{2k_1^2+1}$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$
$=\frac{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}{2k_1^2+1}$.

同理可得 $|CD|=\frac{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}{k_1^2+2}$.

又因为 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$,

所以有 $\lambda=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$
$=\frac{2k_1^2+1}{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}+\frac{k_1^2+2}{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}$
$=\frac{3k_1^2+3}{4\sqrt{2}(1+k_1^2)}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

所以存在常数 $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立.

第8期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1~4.ABCD

5.C

提示:因为$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,

所以$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$,所以$M$与$A$、$B$、$C$必共面.只有选项C符合.

6.B

提示:A错,因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;B对;C错,因为$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$;D错,因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

7.D

8.D

9.D

提示:空间两向量永远是共面向量,与其所在直线位置没有关系,A错误;向量的模与方向没有任何关系,因此B,C错误;D显然正确.

10.B

提示:根据题意,$AB\perp AC$,$AB\perp AD$,所以$AB\perp$平面ACD.又$AC\perp CD$,由三垂线定理,所以$BC\perp CD$.所以$\triangle BCD$是直角三角形.

11.B

提示:因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$,

又$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$不共线,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,

所以$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

所以$\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}\rangle=90°$.

12.C

提示:因为$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(2,t,t)-(1-t,1-t,t)=(1+t,2t-1,0)$,

所以$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(1+t)^2+(2t-1)^2}=\sqrt{5t^2-2t+2}=\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}\geqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

二、填空题

13.-2

提示:P与不共线三点A,B,C共面,且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x,y,z\in\mathbf{R})$,则$x+y+z=1$是四点共面的充要条件.

14.$\frac{42}{5}$

15.-15

16.$(1,1,1)$

提示:设$DP=y>0$,则$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$P(0,0,y)$,$E\left(1,1,\frac{y}{2}\right)$,$\overrightarrow{DP}=(0,0,y)$,$\overrightarrow{AE}=\left(-1,1,\frac{y}{2}\right)$.所以$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=$

$$\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{\frac{1}{2}y^2}{y\sqrt{2+\frac{y^2}{4}}}=\frac{y}{\sqrt{8+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得$y=2$,所以$E(1,1,1)$.

三、解答题

17.**解:**由$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,根据向量加法法则,得$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$.根据空间向量基本定理知,一个向量在一个基底下的分解式是唯一的,故$1=1-\lambda-\mu$,$1=\lambda$,$m=\mu$,解得$\lambda=1$,$\mu=-1$,$m=-1$.所以$m+\lambda+\mu=-1$.

18.**解:**(1)$\overrightarrow{A_1O}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{A_1O}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{A_1O}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1O}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A_1A}$.

(2)$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$,

所以$\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

19.**解:**(1)因为$\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EG}$,$\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GF}$,

所以四边形$EGFH$是平行四边形.

又$AC=BD$,所以四边形$EGFH$是菱形,所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{HG}$,故$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{GH}$的夹角为$90°$.

(2)由(1),同理可证$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{MN}$,所以$EF\perp$平面$MHNG$,所以$EF\perp HN$,$EF\perp MG$,故$\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{MG})=0$.

20.**解:**由于$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,

即$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

又$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则

$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2-3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,

即$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2}{3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

所以$\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2}{3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,即$5|\boldsymbol{b}|^2=8|\boldsymbol{a}|^2$,则$|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{10}}{5}|\boldsymbol{a}|$,

所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

$$=\frac{\frac{8}{5}|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

21.**解:**(1)由已知,得

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$,

所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$.

所以$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

所以向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$共面.

(2)由(1)知向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$共面,三个向量的基线又过同一点M,所以四点M、A、B、C共面,

所以点M在平面ABC内.

22.**解:**以点D为原点O,DA,DC,DD_1分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,

则$D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$A_1(1,0,\lambda)$.

设$P(0,1,x)$,其中$x\in[0,\lambda]$,

则$\overrightarrow{BP}=(-1,0,x)$,$\overrightarrow{A_1P}=(-1,1,x-\lambda)$.

因为$A_1P\perp PB$,所以$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=0$,

代入化简得$x^2-\lambda x+1=0$.

由点P唯一,得$\Delta=\lambda^2-4=0$,且$\lambda>0$,

解得$\lambda=2$.