答案页第3期

数学·人教A(选修2-1)

第9期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.B 4.A 5.B 6.C 7.B 8.D 9.C 10.B 11.C 12.C

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{5}}{10}$ 14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$,45°,45°

15.(1,1,0),(0,0,1)

16.3

三、解答题

17. **证明**:以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

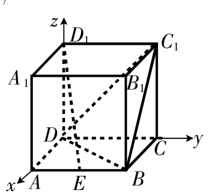
设 $PA=AD=a$,$AB=b$,则 $P(0,0,a)$,$D(0,a,0)$,$C(b,a,0)$,$M\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,$N\left(\frac{b}{2},0,0\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(0,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{PD}=(0,a,-a)$,$\overrightarrow{PC}=(b,a,-a)$.

易知 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ 且 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,即 $\overrightarrow{MN}$ 是平面 PCD 的一个法向量,

所以 $MN\perp$ 平面 PCD.

18.**解**:建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(1,1,0)$,$C_1(0,1,1)$,$D_1(0,0,1)$,$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.



(第 18 题图)

所以 $\overrightarrow{D_1E}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BC_1D 的法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设 D_1E 与平面 BC_1D 的夹角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{D_1E},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{D_1E}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

所以 D_1E 与平面 BC_1D 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

19.**解**:(1)如图,连接 BD,设 $BD\cap AC=G$,连接 EG,FG,EF.

在菱形 $ABCD$ 中,不妨设 $GB=1$.

由 $\angle ABC=120°$,可得 $AG=GC=\sqrt{3}$,由 $BE\perp$ 平面 $ABCD$,$AB=BC$,可知 $AE=EC$.又 $AE\perp EC$,所以 $EG=\sqrt{3}$,且 $EG\perp AC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBG$ 中,可得 $BE=\sqrt{2}$,故 $DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FDG$ 中,可得 $FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

在直角梯形 $BDFE$ 中,

由 $BD=2$,$BE=\sqrt{2}$,$DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,可得 $EF=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

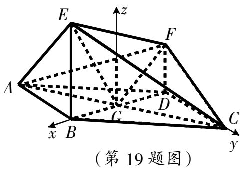
从而 $EG^2+FG^2=EF^2$,所以 $EG\perp FG$.

又 $AC\cap FG=G$,所以 $EG\perp$ 平面 AFC.

因为 $EG\subset$ 平面 AEC,

所以平面 $AEC\perp$ 平面 AFC.

(2)如图,以 G 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{GB}$,$\overrightarrow{GC}$ 的方向为 x 轴,y 轴正方向,$|\overrightarrow{GB}|$ 为单位长,建立空间直角坐标系 $Gxyz$.由(1)可得 $A(0,-\sqrt{3},0)$,$E(1,0,\sqrt{2})$,$F\left(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,



(第 19 题图)

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{3},\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CF}=\left(-1,-\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CF}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

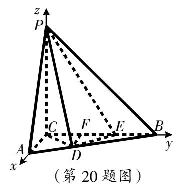
所以直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20.(1)**证明**:因为 $PC\perp$ 平面 ABC,$DE\subset$ 平面 ABC,所以 $PC\perp DE$.

因为 $CE=2$,$CD=DE=\sqrt{2}$,所以 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形,故 $CD\perp DE$.

又 $PC\cap CD=C$,所以 $DE\perp$ 平面 PCD.

(2)**解**:由(1)知,$\triangle CDE$ 为等腰直角三角形,$\angle DCE=\frac{\pi}{4}$.如图,过 D 作 $DF\perp CE$ 于点 F,



(第 20 题图)

易知 $DF=FC=FE=1$,

又 $EB=1$,所以 $FB=2$.

因为 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$,

所以 $DF\parallel AC$,$\frac{DF}{AC}=\frac{FB}{BC}=\frac{2}{3}$,

故 $AC=\frac{3}{2}DF=\frac{3}{2}$.

以 C 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CP}$ 的方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Cxyz$,则 $C(0,0,0)$,$P(0,0,3)$,$A\left(\frac{3}{2},0,0\right)$,$E(0,2,0)$,$D(1,1,0)$,$\overrightarrow{ED}=(1,-1,0)$,$\overrightarrow{DP}=(-1,-1,3)$,$\overrightarrow{DA}=\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$.

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

由 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DP}=0$,$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=0$,

得 $\begin{cases}-x_1-y_1+3z_1=0,\\ \frac{1}{2}x_1-y_1=0,\end{cases}$ 故可取 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,1)$.

由(1)可知 $DE\perp$ 平面 PCD,故平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 可取为 $\overrightarrow{ED}$,即 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,0)$.

从而法向量 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角的余弦值为 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

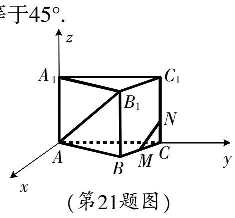
故所求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

21.**解**:如图,以点 A 为原点,AC,AA_1 所在直线分别为 y,z 轴,过 A 点垂直于 AC 的直线为 x 轴,建立空间直角坐标系 $A-xyz$.因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是2,

所以 $A(0,0,0)$,$B_1(\sqrt{3},1,2)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$C(0,2,0)$,

所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

假设在侧棱 CC_1 上存在点 N,使得异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于45°,可设 $N(0,2,m)(0\leqslant m\leqslant 2)$,则 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,2)$,$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},m\right)$,所以 $|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{m^2+1}$,$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=2m-1$.因为异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于45°,所以 $\overrightarrow{AB_1}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的夹角是45°或135°.又因为 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MN}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}$,所以 $\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $m=-\frac{3}{4}$.但 $-\frac{3}{4}\notin[0,2]$,所以点 N 不在侧棱 CC_1 上,即在侧棱 CC_1 上不存在点 N,使得异面直线 AB_1 和 MN 的夹角等于45°.



(第21题图)

22.(1)**证明**:由已知,得 $AB\perp AP$,$CD\perp PD$.因为 $AB\parallel CD$,所以 $AB\perp PD$,又 $AP\cap PD=P$,所以 $AB\perp$ 平面 PAD.又 $AB\subset$ 平面 PAB,所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

(2)**解**:在平面 PAD 内作 $PF\perp AD$,垂足为 F,由(1)可知,$AB\perp$ 平面 PAD,故 $AB\perp PF$,又 $AD\cap AB=A$,所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$.以 F 为坐标原点,$\overrightarrow{FA}$ 的方向为 x 轴正方向,$|AB|$ 为单位长,建立如图所示的空间直角坐标系 $Fxyz$.

由(1)及已知可得

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$,$P\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$,$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$.

所以 $\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$,$\overrightarrow{PA}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 PCB 的法向量,则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\\ \sqrt{2}x=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(0,-1,-\sqrt{2})$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 PAB 的法向量,

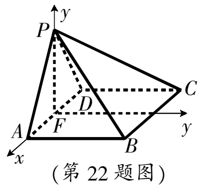
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\\ y=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 22 题图)

第2、3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.C 4.B 5.B 6.C 7.C 8.C 9.D 10.B 11.C 12.B

提示:由题意,知$BD\perp$平面ACD,所以$BD\perp AC$,所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,故①错;平面$ADC$与平面$ABC$不垂直,所以它们的法向量也不垂直,故④错.

二、填空题

13.$(1,-2,1)$;$(-5,7,7)$

14.$\frac{5}{6}$ 15.$\pm\sqrt{39}$ 16.3

三、解答题

17.**解**:因为$BG=2GD$,

所以$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

又$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})$

$=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

18. **解**:$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$,

所以$(AC')^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

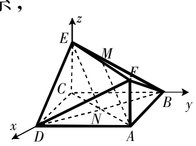
$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA'}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$

$=25+9+49+2(5\times3\cos60^\circ+5\times7\cos45^\circ+3\times7\cos45^\circ)$

$=98+56\sqrt{2}$,

所以$|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{98+56\sqrt{2}}$,即$AC'$的长为$\sqrt{98+56\sqrt{2}}$.

19.**证明**:(1)建立如图所示的空间直角坐标系,



(第19题图)

设$AC\cap BD=N$,连接NE.

则点N,E的坐标分别为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$(0,0,1)$.

所以$\overrightarrow{NE}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

又点A,M的坐标分别为$(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

所以$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

所以$\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{AM}$且$NE$与$AM$不共线.所以$NE/\!/AM$.

又因为$NE\subset$平面BDE,$AM\not\subset$平面BDE,所以$AM/\!/$平面BDE.

(2)由(1)得,

$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

因为$D(\sqrt{2},0,0)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,

所以$\overrightarrow{DF}=(0,\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{BF}=(\sqrt{2},0,1)$.

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}=0$,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BF}=0$.

所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DF}$,$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BF}$,即$AM\perp DF$,$AM\perp BF$.

又$DF\cap BF=F$,所以$AM\perp$平面BDF.

20.(1)**证明**:因为$AE=CF=\frac{5}{4}$,所以$\frac{AE}{AD}=\frac{CF}{CD}$,所以$EF/\!/AC$.因为四边形$ABCD$为菱形,

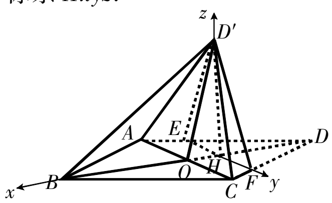
所以$AC\perp BD$,所以$EF\perp BD$,所以$EF\perp DH$,所以$EF\perp D'H$.

因为$AC=6$,所以$AO=3$.又$AB=5$,$AO\perp OB$,

所以$OB=4$,所以$OH=\frac{AE}{AD}\cdot OD=1$,所以$DH=D'H=3$,所以$|OD'|^2=|OH|^2+|D'H|^2$.

所以$D'H\perp OH$.又因为$D'H\perp EF$,$OH\cap EF=H$,所以$D'H\perp$平面$ABCD$.

(2)**解**:建立如图所示空间直角坐标系$Hxyz$.



(第20题图)

则$B(5,0,0)$,$C(1,3,0)$,$D'(0,0,3)$,$A(1,-3,0)$,

$\overrightarrow{AB}=(4,3,0)$,$\overrightarrow{AD'}=(-1,3,3)$,$\overrightarrow{AC}=(0,6,0)$.

设平面$BD'A$的法向量$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

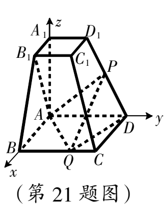
由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AD'}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}4x+3y=0,\\ -x+3y+3z=0,\end{cases}$令$x=3$,则$y=-4$,$z=5$,

所以$\boldsymbol{n}_1=(3,-4,5)$.

同理可得平面$AD'C$的法向量$\boldsymbol{n}_2=(3,0,1)$,所以$|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|9+5|}{5\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{5}}{25}$,

所以$\sin\theta=\frac{2\sqrt{95}}{25}$.所以二面角$B-D'A-C$的正弦值为$\frac{2\sqrt{95}}{25}$.

21.(1)**证明**:由题设知,AA_1,AB,AD两两垂直.以A为坐标原点,AB,AD,AA_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立如图所示的空间直角坐标系$Axyz$,则$A(0,0,0)$,$B_1(3,0,6)$,$D(0,6,0)$,$D_1(0,3,6)$,$Q(6,m,0)$,其中$m=|BQ|$,$0\leqslant m\leqslant6$.



(第21题图)

若P是DD_1的中点,则$P\left(0,\frac{9}{2},3\right)$,$\overrightarrow{PQ}=\left(6,m-\frac{9}{2},-3\right)$.

又$\overrightarrow{AB_1}=(3,0,6)$,所以$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=18-18=0$,

所以$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{PQ}$.所以$AB_1\perp PQ$.

(2)**解**:由题设结合(1)知,$\overrightarrow{DQ}=(6,m-6,0)$,$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$是平面$PQD$内的两个不共线向量.设$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$是平面$PQD$的一个法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DD_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}6x+(m-6)y=0,\\ -3y+6z=0.\end{cases}$

取$y=6$,得$\boldsymbol{n}_1=(6-m,6,3)$.

又平面AQD的一个法向量是$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$,

所以$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3}{1\cdot\sqrt{(6-m)^2+6^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}$.

而二面角$P-QD-A$的余弦值为$\frac{3}{7}$,

因此$\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}=\frac{3}{7}$,

解得$m=4$,或$m=8$(舍去),此时$Q(6,4,0)$.

设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}$$(0<\lambda\leqslant1)$,而$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$,

得点P的坐标为$P(0,6-3\lambda,6\lambda)$,所以$\overrightarrow{PQ}=(6,3\lambda-2,-6\lambda)$.

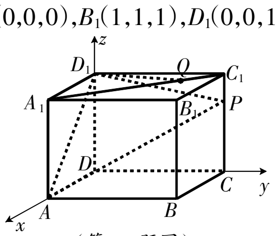
因为$PQ/\!/$平面ABB_1A_1,且平面ABB_1A_1的一个法向量是$\boldsymbol{n}_3=(0,1,0)$,

所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}_3=0$,即$3\lambda-2=0$,亦即$\lambda=\frac{2}{3}$,从而$P(0,4,4)$.

于是,将四面体$ADPQ$视为以$\triangle ADQ$为底面的三棱锥$P-ADQ$,则其高$h=4$,故四面体$ADPQ$的体积为

$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times4=24$.

22.**解**:(1)如图,建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,1,m)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.



(第22题图)

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

又由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$,知$\overrightarrow{AC}$为平面$BDD_1B_1$的一个法向量.

设AP与平面BDD_1B_1的夹角为θ,

则$\sin\theta=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$,

依题意有$\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\frac{1}{3}$,

解得$m=4$,或$m=-4$(舍去).

故当$m=4$时,直线AP与平面BDD_1B_1夹角的正弦值为$\frac{1}{3}$.

(2)若在线段A_1C_1上存在这样的点Q,设此点的横坐标为x,则$Q(x,1-x,1)$,

所以$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意,对任意的m要使D_1Q在平面APD_1上的投影垂直于AP,即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow-x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

即Q为A_1C_1的中点时,满足题设的要求.

第2~3版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A　2.A　3.D

4.B

提示：$2p=10$，$p=5$，焦点到准线的距离是p.

5.D　6.C　7.A　8.A

9.B

提示：由已知，得动点P的轨迹是以F_1，F_2为焦点，且$2a=2$的双曲线的左支，所以动点P满足的方程为$x^2-y^2=1(x<0)$.

将$y=\frac{1}{2}$代入，解得$x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

10.C　11.A　12.D

二、填空题

13.存在$x_0\in\mathbf{R}$，使得$x_0^2+x_0-4\leqslant0$

14.0

15.m

提示：由已知，得p，m必一真一假.若p是真命题，则q，m都是假命题，从而B，C都错误，不满足条件，故p是假命题，m是真命题.

16.2

提示：设焦点为F，则根据条件知$\triangle FAO$中，$\angle FAO$是直角，$\angle FOA=60°$，$|OF|=c$，$|OA|=a$，所以$\frac{a}{c}=\cos60°=\frac{1}{2}$，即双曲线$C$的离心率是2.

三、解答题

17.**解：**令$f(x)=x^2+(2k-1)x+k^2$，

方程$x^2+(2k-1)x+k^2=0$有两个大于1的实数根

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(2k-1)^2-4k^2\geqslant0,\\-\frac{2k-1}{2}>1,\\f(1)>0,\end{cases}$$

解得$k<-2$.

所以其充要条件为$k\in(-\infty,-2)$.

18.**解：**若p为真命题，则$\begin{cases}3-a>0,\\1+a>0,\\3-a\neq1+a,\end{cases}$

解得$-1<a<3$且$a\neq1$.

若q为真命题，

当$a=2$时，$-4<0$恒成立；

当$a\neq2$时，有

$$\begin{cases}a-2<0,\\\Delta=4(a-2)^2-4(a-2)\times(-4)<0,\end{cases}$$

解得$-2<a<2$，

故$-2<a\leqslant2$.

若$p\wedge q$是真命题，则实数a的取值范围是$(-1,1)\cup(1,2]$.

19.**解：**(1)由椭圆C的一个焦点为$F(0,-\sqrt{2})$，得椭圆C焦点在y轴上，且另一个焦点为$F'(0,\sqrt{2})$，半焦距$c=\sqrt{2}$.

又点$M(1,\sqrt{2})$在椭圆C上，

所以$2a=|MF|+|MF'|=4$.

所以$a=2$，$b^2=a^2-c^2=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$.

(2)联立直线l与椭圆C的方程，

解得$x=0$，$y=-2$，或$x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{2}{3}$.

所以$A(0,-2)$，$B\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{5}.$$

20.(1)**解：**以O为坐标原点，OA，OC，OO_1所在直线分别为x，y，z轴，建立空间直角坐标系，则$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面A_1BC_1的法向量，则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，而$\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，所以$\begin{cases}-y+z=0,\\-x+z=0,\end{cases}$即$x=y=z$.

取$z=1$，则$x=y=1$，故$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面A_1BC_1的一个法向量.

(2)**证明：**因为$E\left(0,\frac{2}{3},1\right)$，$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$，

则$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

又$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$，

所以$\overrightarrow{EF}\perp\boldsymbol{n}$，所以$EF$∥平面$A_1BC_1$.

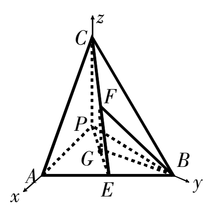
21.**解：**(1)以PA所在直线为x轴，PB所在直线为y轴，PC所在直线为z轴，P为原点建立空间直角坐标系，如图所示，则$B(0,2,0)$，$C(0,0,4)$，$A(2,0,0)$.

因为E为AB的中点，

所以$E(1,1,0)$.

因为F为CE的中点，

所以$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$.



（第21题图）

(2)连接PE，设G为PE的中点，连接FG，BG，则$G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

因为PA，PB，PC两两互相垂直，

所以$PC\perp$平面ABP，

因为F，G分别为CE，PE的中点，

所以FG∥PC，

所以$FG\perp$平面ABP.

故$\angle FBG$为BF与平面ABP所成的角.

因为$\cos\angle FBG=\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}\rangle$，$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},2\right)$，$\overrightarrow{BG}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}\rangle=\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BG}|}=$

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}=\frac{\sqrt{65}}{13},$$

即BF与底面ABP所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{65}}{13}$.

22.**解：**(1)双曲线D的标准方程为

$$\frac{y^2}{\frac{2}{3}}-\frac{x^2}{\frac{1}{3}}=1.$$

由题意，得抛物线C的顶点为原点O，焦点为$(0,\pm1)$.

故抛物线C的方程为$x^2=4y$或$x^2=-4y$.

(2)若点$P(t,1)(t>0)$为抛物线C上的定点，

则抛物线C的方程为$x^2=4y$，

可得$P(2,1)$.

设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$.

因为$PA\perp PB$，

所以$k_{PA}k_{PB}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}$

$=\frac{(x_1+2)(x_2+2)}{16}=-1$，

即$x_1x_2+2(x_1+x_2)+20=0$.①

设直线AB的方程为$y=kx+b$，

将其与$x^2=4y$联立并消去y，

整理得$x^2-4kx-4b=0$.

所以$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4b$.

代入①式中，可得$b=2k+5$.

所以直线AB的方程为

$y=kx+2k+5=k(x+2)+5$.

由直线方程的点斜式，

可知直线AB经过定点$(-2,5)$.

数学·人教 A(选修 2-1)

第 12 期

第 2~3 版综合检测题(二)

参考答案

一、选择题

1.A

2.D

3.A

提示：若方程 $\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{m+3}=1$ 表示双曲线，则 $(m-2)(m+3)<0$，解得 $-3<m<2$.依次分析各选项，可知选 A.

4.A

提示：依题意知，焦点 $\left(0,\frac{2}{|m|}\right)$ 在 y 轴正半轴上，因此 $m>0$，且有 $\frac{m}{4}=\frac{2}{|m|}$，解得 $m=2\sqrt{2}$.

5.B

6.A

提示：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=(\cos^2\alpha+1+\sin^2\alpha)-(\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha)=0$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 90°.

7.A

提示：由题设知 $mn\neq0$，又 $m+n=1$，则 $\overrightarrow{OP}=(1-n)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-n\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，所以 $\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$，因此 A,P,B 共线，即点 P 必在直线 AB 上.

8.B

提示：设 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 为 y 轴上的单位向量，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\times1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.即 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成的角为 $\frac{3\pi}{4}$，所以 y 轴与平面 α 所成的角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

9.A

10.A

提示：$4-b^2=1$，故 $b^2=3$，

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

联立 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 与 $y=kx+2$，得 $(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$，

有 $\Delta=(16k)^2-16(4k^2+3)\leqslant0$，

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$.

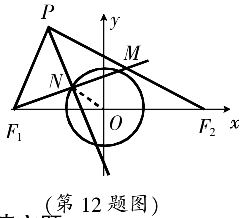
11.D

12.B

提示：连接 ON，如图所示，则

$||PF_2|-|PF_1||=||PF_2|-|PM||$
$=|MF_2|=2|ON|=2<|F_1F_2|$，

故点 P 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的双曲线.



(第 12 题图)

二、填空题

13.x 轴，$-3-\log_2x$　14.4　15.6

16.$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

三、解答题

17.**解：**由 $x^2-4ax+3a^2<0$ 及 $a<0$，

得 $3a<x<a$，即 $p:3a<x<a$.

由 $x^2-x-6\leqslant0$，得 $-2\leqslant x\leqslant3$；

由 $x^2+2x-8>0$，得 $x<-4$ 或 $x>2$，

所以 $q:x<-4$ 或 $x\geqslant-2$.

因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，

所以 $p\Rightarrow q$，

于是，得 $\begin{cases}3a\geqslant-2,\\a<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\leqslant-4,\\a<0,\end{cases}$

得 $-\frac{2}{3}\leqslant a<0$ 或 $a\leqslant-4$.

故实数 a 的取值范围为

$(-\infty,-4]\cup\left[-\frac{2}{3},0\right)$.

18.**解：**因为 $a>0$，$a\neq1$，所以命题 p 为真时 $\Leftrightarrow0<a<1$，命题 p 为假时 $\Leftrightarrow a>1$；

命题 q 为真时 $\Leftrightarrow\Delta=(2a-3)^2-4>0$，且 $a>0$，$a\neq1\Leftrightarrow0<a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{5}{2}$，命题 q 为假时 $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $1<a\leqslant\frac{5}{2}$.

由“$p\vee q$”为真且“$p\wedge q$”为假，

知 p,q 有且只有一个为真命题.

若 p 真 q 假，则 $a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$；

若 p 假 q 真，则 $a\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

所以实数 a 的取值范围是

$\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

19.**解：**(1)由已知，得 $p=4$，

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2=8x$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$，

则 $y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$.

两式作差，得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.

当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$，

即 $k_{AB}=\frac{8}{2y}=k_{MP}=\frac{y-0}{x-3}$，所以 $y^2=4x-12$；

当 $x_1=x_2$ 时，$AB\perp x$ 轴，则 AB 的中点即为点 $P(3,0)$，也满足 $y^2=4x-12$.

综上所述，弦 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $y^2=4x-12$.

20.(1)**解：**由 $F_2(2,0)$，得 $a^2-b^2=4$；

由 $F_3(-6,0)$，得 $a^2+b^2=36$.

联立以上两式，解得 $a^2=20$，$b^2=16$.

所以曲线 Γ 的方程为

$\begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1,y\leqslant0,\\\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1,y>0.\end{cases}$

(2)**证明：**曲线 C_2 的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

设直线 $l:y=\frac{b}{a}(x-m)$，

与曲线 C_1 的方程联立并消去 y，

整理得 $2x^2-2mx+(m^2-a^2)=0$.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

则 $x_1+x_2=m$，$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2}$，

$y_0=\frac{b}{a}(x_0-m)=-\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{2}=-\frac{b}{a}x_0$，

即点 $M(x_0,y_0)$ 在另一条渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上.

21.(1)**证明：**取 $A'B'$ 中点 P，连接 MP，NP，而 M,N 分别是 $A'B$ 与 $B'C'$ 的中点，

所以 $MP/\!/AA'$，$PN/\!/A'C'$，

所以 $MP/\!/$ 平面 $A'ACC'$，$PN/\!/$ 平面 $A'ACC'$.

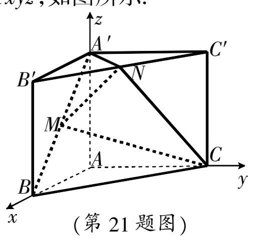
又 $MP\cap NP=P$，

因此平面 $MPN/\!/$ 平面 $A'ACC'$.

而 $MN\subset$ 平面 MPN，

所以 $MN/\!/$ 平面 $A'ACC'$.

(2)**解：**以 A 为坐标原点，AB,AC,AA' 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立直角坐标系 $Axyz$，如图所示.



(第 21 题图)

设 $AA'=1$，则 $AB=AC=\lambda$，

于是 $A(0,0,0)$，$B(\lambda,0,0)$，$C(0,\lambda,0)$，$A'(0,0,1)$，$B'(\lambda,0,1)$，$C'(0,\lambda,1)$.

所以 $M\left(\frac{\lambda}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$N\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},1\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 $A'MN$ 的法向量，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'M}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'N}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{\lambda}{2}x_1-\frac{1}{2}z_1=0,\\\frac{\lambda}{2}x_1+\frac{\lambda}{2}y_1=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(1,-1,\lambda)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 MNC 的法向量，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{\lambda}{2}x_2+\frac{\lambda}{2}y_2-z_2=0,\\\frac{\lambda}{2}y_2+\frac{1}{2}z_2=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(-3,-1,\lambda)$.

因为 $A'-MN-C$ 为直二面角，

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

即 $-3+(-1)\times(-1)+\lambda^2=0$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.

22.**解：**如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系 $Axyz$.依题意可得

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，

$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，

$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，

$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$.

(1)**证明：**$\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$.设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\2x-2z=0.\end{cases}$

不妨设 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

又 $\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

因为 $MN\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $MN/\!/$ 平面 BDE.

(2)**解：**易知 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$ 为平面 CEM 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 为平面 EMN 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EM}=0,\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0,\end{cases}$

因为 $\overrightarrow{EM}=(0,-2,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，

所以 $\begin{cases}-2y-z=0,\\x+2y-z=0.\end{cases}$ 不妨设 $y=1$，

可得 $\boldsymbol{n}_2=(-4,1,-2)$.

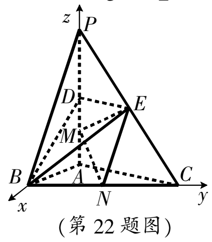
因此，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-4}{1\times\sqrt{16+1+4}}=-\frac{4}{\sqrt{21}}$，

于是 $\sin\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\sqrt{105}}{21}$.

所以二面角 $C-EM-N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{21}$.

(3)**解：**依题意，设 $AH=h(0\leqslant h\leqslant4)$，则 $H(0,0,h)$，进而可得 $\overrightarrow{NH}=(-1,-2,h)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,2,2)$.由已知，得 $|\cos\langle\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{21}$，整理，得 $10h^2-21h+8=0$，解得 $h=\frac{8}{5}$，或 $h=\frac{1}{2}$.

所以线段 AH 的长为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.



(第 22 题图)