答案页第 3 期
数学·北师大(必修 1)
第 9 期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C　2.C　3.B

4.C

提示:设共分裂了 x 次,则有 $2^x=4\ 096$,所以 $2^x=2^{12}$,即 $x=12$.

又因为每次 15 分钟,所以共 $15\times12=180$ 分钟,即 3 小时.

5.A

提示:将 $x=1$,$y=100$ 代入 $y=a\log_2(x+1)$,得 $100=a\log_2(1+1)$,解得 $a=100$,所以当 $x=7$ 时,$y=100\log_2(7+1)=300$.

6.C　7.D

8.C

提示:7 月份该产品的市场收购价格 a 与其前三个月的市场收购价格之差的平方和为

$y=(a-71)^2+(a-72)^2+(a-70)^2$

$=3a^2-2\times(71+72+70)a+(71^2+72^2+70^2)$,

当 y 取得最小值时,$a=\frac{2\times(71+72+70)}{2\times3}=71$.

故 7 月份该产品每担的市场收购价格应为 71 元.

9.B

提示:买股票利润 $a=(18.96-17.25)\times10000=17100$,存银行利润 $b=17.25\times10000\times[(1+0.008)^{12}-1]=17308>17100$,故全部存银行.

10.C

提示:令 $y=60$,若 $4x=60$,则 $x=15>10$,不合题意;若 $2x+10=60$,则 $x=25$,满足题意;若 $1.5x=60$,则 $x=40<100$,不合题意.故拟录用人数为25.

11.D

12.B

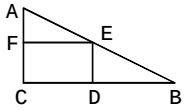
提示:通过 n 块玻璃后的光线强度变为原来的 $\left(1-\frac{1}{10}\right)^n$,令 $\left(1-\frac{1}{10}\right)^n<\frac{1}{3}$,两边取对数,$n>\frac{\lg3}{1-2\lg3}\approx10.42$,所以 n 至少取 11.

二、填空题

13.$y=180(1+x)^{10}$

14.600

提示:如图,在直角三角形 ABC 中,剪出一个矩形 CDEF.设 CD=x,CF=y,则 AF=40-y.因为△AEF∽△ABC,所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$,即 $\frac{40-y}{40}=\frac{x}{60}$,所以 $y=40-\frac{2}{3}x$,矩形的面积 $S=xy=x\left(40-\frac{2}{3}x\right)=-\frac{2}{3}(x-30)^2+600(0<x<60)$,当 x=30 时,S 取得最大值 600.



(第 14 题图)

15.$y=\frac{a}{4}x(x\in N_+)$

提示:设新价为 b,依题意,有 $b(1-20\%)-a(1-25\%)=b(1-20\%)\cdot25\%$,化简得 $b=\frac{5}{4}a$.所以 $y=b\cdot20\%\cdot x=\frac{5}{4}a\cdot20\%\cdot x$,即 $y=\frac{a}{4}x(x\in N_+)$.

16.ABE(或 $BDEF$)

提示:可以先用 6 亿元投资项目 E,所获利润为 0.9 亿元,那么剩下的 7 亿元投资所获利润只需大于 0.7 亿元.

方案 1:用 5 亿元投资项目 A,所获利润为 0.55 亿元,剩下的 2 亿元只能投资项目 B,则又获得利润 0.4 亿元,此时剩下的 7 亿元投资所获利润为 0.95 亿元,则投资项目选 ABE 符合要求.

方案 2:用 4 亿元投资项目 D,所获利润为 0.5 亿元,剩下的 3 亿元只能投资项目 B,F,则又获得利润 0.5 亿元,此时剩下的 7 亿元投资所获利润为 1 亿元,则投资项目选 $BDEF$ 符合要求.

三、解答题

17.**解**:设两家旅行社的原价为 $a(a>0)$,家庭孩子的个数为 $x(x\in\mathbf{N}_+)$,甲、乙两家旅行社收费分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$,

则 $f(x)=a+(x+1)\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a(x\in\mathbf{N}_+)$,

$g(x)=(x+2)\cdot\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}ax+\frac{4}{3}a(x\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $f(x)-g(x)=-\frac{a}{6}(x-1)$,

所以当 $x=1$ 时,$f(x)=g(x)$.当 $x>1$ 时,$f(x)-g(x)<0$.

因此,当家庭只有一个孩子时,两家旅行社随便选择,当孩子多于 1 个时,应选择甲旅行社.

18.**解**:(1)由题意可得方程组

$\begin{cases}64=c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}c=128,\\m=\frac{1}{4},\end{cases}$

所以 $y=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$.

(2)由题意可得不等式 $y=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant0.5$,

即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{8m}$,即 $\frac{1}{4}t\geqslant8$,解得 $t\geqslant32$.

所以至少排气32分钟,这个地下车库中的一氧化碳含量才能达到正常状态.

19.**解**:(1)由题意,知当 $Q=0$ 时,代入关系式可得 $0=50\log_2\frac{S}{10}$,解得 $S=10$.

因为 Q 随 S 的增大而增大,所以当 $Q\geqslant0$ 时,$S\geqslant10$,

即森林面积至少有 10 个单位.

(2)将 $S=80$ 代入关系式得

$Q=50\log_2\frac{80}{10}=50\log_28=150$.

即森林面积为 80 个单位时,它能净化的空气量为 150 个单位.

20.**解**:(1)设投资人购买的股票价格为 m,

则经历一个涨停后价格为 $m(1+10\%)=1.1m$,

又经历一个跌停后价格为 $1.1m(1-10\%)=0.99m<m$,

所以该投资人有一定的亏损.

(2)设至少要 n 个交易日以后资金才会翻番且投资人的资金为a,

则 $a(1+10\%)^n\geqslant2a$,即 $1.1^n\geqslant2$,

两边取常用对数,得 $n\lg1.1\geqslant\lg2$.

又 $\lg1.1>0$,所以 $n\geqslant\frac{\lg2}{\lg1.1}\approx7.3$.

故至少要 8 个交易日以后,资金才会翻番.

21.**解**:(1)由题意,可得 $y=0.25\times20x^2+0.25\times10\times(100-x)^2$,且 $10\leqslant x\leqslant90$,

故 $y=\frac{15}{2}x^2-500x+25000$,$10\leqslant x\leqslant90$.

(2)$y=\frac{15}{2}x^2-500x+25000$

$=\frac{15}{2}\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{50000}{3}$.

当 $x=\frac{100}{3}$ 时,y最小.

故核电站应建在距A城 $\frac{100}{3}$ km处,才能使供电费用最低.

22.**解**:(1)当 $x\in[0,4]$ 时,设 $y=kx$,

把点(4,320)代入,得 $k=80$,所以 $y=80x$.

当 $x\in[4,20]$ 时,设 $y=kx+b$,

把点(4,320),(20,0)分别代入,

得 $\begin{cases}4k+b=320,\\20k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-20,\\b=400.\end{cases}$

所以 $y=400-20x$.

所以 $f(x)=\begin{cases}80x,0\leqslant x\leqslant4,\\400-20x,4<x\leqslant20.\end{cases}$

(2)设第一次服药 x 小时后血液中的残留量为 y_1,则

$y_1=f(x)=\begin{cases}80x,0\leqslant x\leqslant4,\\400-20x,4<x\leqslant20.\end{cases}$

由 $y_1\geqslant240$,

得 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant4,\\80x\geqslant240,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4<x\leqslant20,\\400-20x\geqslant240,\end{cases}$

解得 $3\leqslant x\leqslant4$ 或 $4<x\leqslant8$,即 $3\leqslant x\leqslant8$.

故第二次服药应在第一次服药 8 小时后,即当日 16:00.

设第二次服药产生的残留量为 y_2,

则 $y_2=f(x-8)$

$=\begin{cases}80(x-8),8\leqslant x\leqslant12,\\400-20(x-8),12<x\leqslant28.\end{cases}$

由 $y_2\geqslant240$,

得 $\begin{cases}8\leqslant x\leqslant12,\\80(x-8)\geqslant240\end{cases}$

或 $\begin{cases}12<x\leqslant28,\\400-20(x-8)\geqslant240,\end{cases}$

解得 $11\leqslant x\leqslant12$ 或 $12<x\leqslant16$,

即 $11\leqslant x\leqslant16$.

若仅考虑第二次服药的残留量,第三次服药应在第一次服药 16 小时后,而前两次服药的残留量为 y_1+y_2,

由 $\begin{cases}x>16,\\y_1+y_2\geqslant240,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x>16,\\400-20x+400-20(x-8)\geqslant240,\end{cases}$

解得 $16<x\leqslant18$.

故第三次服药应在第一次服药 18 小时后,即次日凌晨 2:00.

数学·北师大(必修1)
第10期

第2、3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A　2.A　3.C　4.A　5.C　6.C　7.D　8.C　9.A

提示:令 $f(x)=x+2^x=0$,因为 2^x 恒大于零,所以要使得 $x+2^x=0$,x 必须小于零,即 x_1 小于零;令 $g(x)=x+\ln x=0$,要使得 $\ln x$ 有意义,则 x 必须大于零,又 $x+\ln x=0$,所以 $\ln x<0$,解得 $0<x<1$,即 $0<x_2<1$;令 $h(x)=x-\sqrt{x}-1=0$,得 $x=\sqrt{x}+1>1$,即 $x_3>1$,从而可知 $x_1<x_2<x_3$.

10.D

提示:由于 $f(x)$ 为奇函数,且 $y=x$ 是奇函数,所以 $g(x)=f(x)-x$ 也应为奇函数,所以由函数 $g(x)=f(x)-x$ 的零点恰有两个,可见两零点必定分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内,由此得到函数 $g(x)=x^2-2x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有一个零点,即函数 $y=-(x-1)^2+1$ 与直线 $y=a$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有一个公共点,数形结合易知应为 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$,选D.

11.D

12.B

提示:设投放 x 万元经销甲商品,则经销乙商品投放 $(20-x)$ 万元,总利润 $y=P+Q=\frac{x}{4}+\frac{a}{2}\cdot\sqrt{20-x}$. 令 $y\geqslant 5$,则 $\frac{x}{4}+\frac{a}{2}\cdot\sqrt{20-x}\geqslant 5$. 所以 $a\sqrt{20-x}\geqslant 10-\frac{x}{2}$,即 $a\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{20-x}$ 对 $0\leqslant x<20$ 恒成立,而 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{20-x}$ 的最大值为 $\sqrt{5}$,且 $x=20$ 时,$a\sqrt{20-x}\geqslant 10-\frac{x}{2}$ 也成立,所以 $a_{\min}=\sqrt{5}$.

二、填空题

13.$V=20-\frac{t}{15}(0\leqslant t\leqslant 300)$

提示:由已知得水箱中水的剩余量

$V=20-\frac{20}{300}t=20-\frac{1}{15}t(0\leqslant t\leqslant 300)$.

14.6,10 000

提示:此次地震的震级为 $\lg 1\ 000-\lg 0.001=3-(-3)=6$.设9级地震时最大振幅为 A_1,5级地震时最大振幅为 A_2,

则 $9=\lg A_1-(-3)$,$5=\lg A_2-(-3)$,所以 $A_1=10^6$,$A_2=10^2$,$\frac{A_1}{A_2}=10\ 000$.

15.$(0,1]$

提示:x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的零点,则 x_1,x_2 为方程 $x^2-2x+b=0$ 的两正根,

则有 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2=2>0,\\ x_1x_2=b>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4-4b\geqslant 0,\\ b>0,\end{cases}$

解得 $0<b\leqslant 1$.

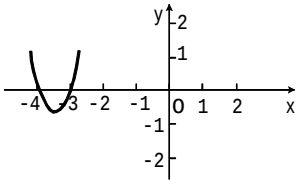
16.2

提示:因为 $2<a<3<b<4$,所以 $f(2)=\log_a 2+2-b<1+2-b=3-b<0$,$f(3)=\log_a 3+3-b>1+3-b=4-b>0$.即 $f(2)\cdot f(3)<0$,易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点 x_0,且 $x_0\in(2,3)$,所以 $n=2$.

三、解答题

17.**解**:(1)函数的图像如下:

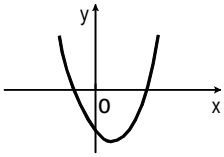


(第17题图1)

所以原方程有两个不相等的实根.

(2)$\lg(x^2-x-2)=0\Rightarrow x^2-x-3=0$,

因为函数 $f(x)=x^2-x-3$ 的大致图像如下:



(第17题图2)

所以原方程有两个不相等的实根.

18.**解**:在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=\lg x$ 与 $y=1-\frac{x}{2}$ 的图像,如下图所示,它们只有一个交点,且其横坐标 $x_0\in(1,2)$,因此,方程 $\lg x+\frac{x}{2}=1$ 只有一个根 $x_0\in(1,2)$.

令 $f(x)=\lg x+\frac{x}{2}-1$,由 $f(1)=-\frac{1}{2}$,$f(2)=\lg 2$,知 $f(1)\cdot f(2)<0$,说明函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内只有一个零点 x_0.

取区间 $(1,2)$ 的中点 $x_1=1.5$,用计算器算得 $f(1.5)\approx -0.074$.因为 $f(1.5)\cdot f(2)<0$,所以 $x_0\in(1.5,2)$.

再取区间 $(1.5,2)$ 的中点 $x_2=1.75$,用计算器算得 $f(1.75)\approx 0.118$.

因为 $f(1.5)\cdot f(1.75)<0$,

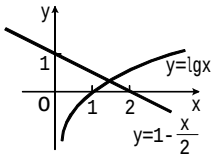
所以 $x_0\in(1.5,1.75)$.

同理可得,$x_0\in(1.5,1.625)$,

$x_0\in(1.5625,1.625)$.

由于 $|1.5625-1.625|=0.0625<0.1$,

故原方程的近似解可取为1.625.



(第18题图)

19.**解**:(1)因为 -1 和 -3 是函数 $f(x)$ 的两个零点,

所以 -1 和 -3 是方程 $x^2-(k-2)x+k^2+3k+5=0$ 的两实根.

则 $\begin{cases}-1-3=k-2,\\ -1\times(-3)=k^2+3k+5,\end{cases}$ 解得 $k=-2$.

(2)由题意知 α 和 β 是方程 $x^2-(k-2)\cdot x+k^2+3k+5=0$ 的两实根,

则 $\begin{cases}\alpha+\beta=k-2,\\ \alpha\beta=k^2+3k+5,\end{cases}$

所以 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$.

因为当 $-4<k<-\frac{4}{3}$ 时,函数 $y=-(k+5)^2+19$ 是减函数,

所以 $\alpha^2+\beta^2$ 的取值范围是 $\left(\frac{50}{9},18\right)$.

20.**解**:因为 $-\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点,

所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

因为 $y=f(x)$ 是偶函数且在 $(-\infty,0]$ 上单调递增,

所以当 $\log\frac{1}{4}x\leqslant 0$,解得 $x\geqslant 1$,

当 $\log\frac{1}{4}x\geqslant -\frac{1}{2}$,解得 $x\leqslant 2$,所以 $1\leqslant x\leqslant 2$.

由对称性可知,当 $\log\frac{1}{4}x>0$ 时,$\frac{1}{2}\leqslant x<1$.

综上所述,x 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

21.**解**:(1)设投资债券等稳健型产品的收益 $f(x)=k_1x$,投资股票等风险型产品的收益 $g(x)=k_2\sqrt{x}$,

由题意,得 $f(1)=\frac{1}{8}=k_1$,$g(1)=\frac{1}{2}=k_2$,

所以 $f(x)=\frac{1}{8}x(x\geqslant 0)$,

$g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}(x\geqslant 0)$.

(2)设投资债券类产品 x 万元,则投资股票类产品 $(20-x)$ 万元.

依题意,得 $y=f(x)+g(20-x)$

$=\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{20-x}(0\leqslant x\leqslant 20)$.

令 $t=\sqrt{20-x}(0\leqslant t\leqslant 2\sqrt{5})$,

则 $y=\frac{20-t^2}{8}+\frac{1}{2}t=-\frac{1}{8}(t-2)^2+3$.

当 $t=2$,即 $x=16$ 时,y 取得最大值3.

因此,当投资债券类产品16万元,投资股票类产品4万元时,收益最大,最大收益是3万元.

22.**解**:(1)因为随着时间 x 的增加,y 的值先减少后增加,而在所给的三个函数中 $y=ax+b$ 和 $y=a\log_b x$ 显然都是单调函数,不满足题意,

所以 $y=ax^2+bx+c$ 最合适.

(2)把点 $(4,90)$,$(10,51)$,$(36,90)$ 代入方程,

得 $\begin{cases}a\times 4^2+4b+c=90,\\ a\times 10^2+10b+c=51,\\ a\times 36^2+36b+c=90,\end{cases}$

解方程组,得 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ b=-10,\\ c=126,\end{cases}$ 所以 $y=\frac{1}{4}x^2-10x+126=\frac{1}{4}(x-20)^2+26$.

所以当 $x=20$ 时,y 有最小值,$y_{\min}=26$.

故该纪念章市场价最低时的上市天数为20,最低价格为26元.

(3)由(2)知 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-10x+126$,

因为 $f(x)=kx+2m+120$ 恒有两个相异的实根,则 $\frac{1}{4}x^2-(k+10)x+6-2m=0$ 恒有两个相异的实根,

所以 $\Delta=[-(k+10)]^2-4\times\frac{1}{4}(6-2m)>0$ 恒成立,即 $2m>-(k+10)^2+6$ 对任意 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立,而 $-(k+10)^2+6\leqslant 6$,

所以只需 $2m>6$,即 $m>3$.

故 m 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

数学·北师大(必修1)
第11期

第2、3版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A

2.A

3.A

4.B

5.C

提示:$y=\lg\frac{x+3}{10}=\lg(x+3)-1$,故需要把函数 $y=\lg x$ 的图像上所有的点向左平移3个单位长度,再向下平移1个单位长度.

6.A

7.A

8.A

提示:A中要使函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 有意义,则 $-x>0$,即 $x<0$,故其图像不正确.

9.C

提示:对数函数恒过点(1,0),故 $M(1,1)$,$N(1,2)$ 不是好点;指数函数 $y=a^x$ 恒过点(0,1),故 $P(2,1)$ 不是好点;而 $Q(2,2)$ 是函数 $y=(\sqrt{2})^x$ 与 $y=\log_{\sqrt{2}}x$ 的交点,$G\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 是函数 $y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_4 x$ 的交点,均为好点,故好点有2个.

10.B

提示:当函数图像关于直线 $x=2$ 对称时,$a=-4$,所以 $\Delta=16-4b>0$,$b<4$.$f(1)-1=f(3)-1=b-4<0$,故 $f(1)$,$f(3)$ 两个函数值都小于1;当函数图像不关于直线 $x=2$ 对称时,$f(1)$,$f(3)$ 两个函数值中至少有一个小于1.

11.D

提示:f(x)是(-∞,+∞)上的减函数,当 x>1 时,$f(x)=\frac{2a}{x}$,有 a>0;当 x≤1 时,f(x)=(a-3)x+5,有 a-3<0⇒a<3;当 x=1 时,(a-3)·1+5≥2a⇒a≤2.综上所述,实数 a 的取值范围是(0,2],故选 D.

12.A

提示:因为 f(x)是定义在 R 上的奇函数,所以 f(x)=-f(-x).又因为 f(x)的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,所以 f(x)=f(1-x),所以 f(-x)=f(1+x)=-f(x),所以 f(2+x)=-f(1+x)=f(x),所以 f(0)=f(1)=f(3)=f(5)=0,f(0)=f(2)=f(4)=0,所以 f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0,故选 A.

二、填空题

13.(0.5,0.75)

提示:由 $f(-1)<0$,$f(1)>0$,又 $f(0)=-1<0$,知 x_0 在区间(0,1)内;再由 $f(0.5)=-0.375<0$,知 x_0 在区间(0.5,1)内;$f(0.75)>0$,知 x_0 在区间(0.5,0.75)内.

14.4

提示:$A=\{x|0<x\leqslant 4\}$,$B=(-\infty,a)$.

若 $A\subseteq B$,则 $a>4$,即 a 的取值范围为 $(4,+\infty)$,所以 $c=4$.

15.30.2%

提示:设现有车辆总数为 a,2017 年底更新了现有总车辆数的百分比为 x,则 a·x+a·x(1+10%)+ax(1+10%)²=a.所以 $x(1+1.1+1.1^2)=1$.所以 $x\approx 30.2\%$.

16.6

提示:$f(2)=\lg 32+\log_4 16+6\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{1}{5}=5\lg 2+2-6\lg 2-\lg 5=2-(\lg 2+\lg 5)=2-1=1$.

因为 $y=f(x)+x$ 是偶函数,所以 $f(-x)-x=f(x)+x$,所以 $f(-x)=f(x)+2x$,

所以 $g(-2)=f(-2)+1=f(2)+2\times 2+1=6$.

三、解答题

17.**解**:因为 $a=(\lg 2)^2+(\lg 5)^2+\lg 4\lg 5+2\log_5 10+\log_5 0.25$

$=(\lg 2)^2+(\lg 5)^2+2\lg 2\lg 5+\log_5 100+\log_5 0.25$

$=(\lg 2+\lg 5)^2+\log_5 25=1+2=3$,

$b=(\log_2 125+\log_8 5)\cdot\log_5 2=(\log_2 5^3+\log_{2^3}5)\cdot\log_5 2=\left(3\log_2 5+\frac{1}{3}\log_2 5\right)\cdot\log_5 2=\left(\frac{10}{3}\log_2 5\right)\times\log_5 2=\frac{10}{3}$,

所以 $a<b$.

18.**解**:由题意,得 $B=\{-1\}$,$\{1\}$ 或 $\{1,-1\}$.

由根与系数的关系,

得 $\begin{cases}-1-1=2a,\\(-1)\times(-1)=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+1=2a,\\1\times 1=b,\end{cases}$

或 $\begin{cases}-1+1=2a,\\(-1)\times 1=b,\end{cases}$

解得 $a=-1$,$b=1$;或 $a=1$,$b=1$;或 $a=0$,$b=-1$.

19.**解**:(1)$h(x)=\log_a(x-1)-\log_{\frac{1}{a}}(3-x)=\log_a(x-1)(3-x)$.

令 $t=(x-1)(3-x)=-(x-2)^2+1$,而 $x\in(1,3)$,所以 $t\in(0,1]$.

当 $0<a<1$ 时,$\log_a t\geqslant 0$,即 $h(x)\geqslant 0$;

当 $a>1$ 时,$\log_a t\leqslant 0$,即 $h(x)\leqslant 0$.

所以当 $0<a<1$ 时,函数 $h(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$;当 $a>1$ 时,函数 $h(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

(2)由 $f(x)+g(x)\geqslant 0$,得 $f(x)\geqslant -g(x)$,

即 $\log_a(x-1)\geqslant\log_a(3-x)$.①

当 $0<a<1$ 时,要使不等式①成立,

则 $\begin{cases}x-1>0,\\3-x>0,\\x-1\leqslant 3-x,\end{cases}$ 即 $1<x\leqslant 2$;

当 $a>1$ 时,要使不等式①成立,

则 $\begin{cases}x-1>0,\\3-x>0,\\x-1\geqslant 3-x,\end{cases}$ 即 $2\leqslant x<3$.

综上所述,当 $0<a<1$ 时,不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 0$ 中 x 的取值范围为 $(1,2]$;当 $a>1$ 时,不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 0$ 中 x 的取值范围为 $[2,3)$.

20.**解**:令 $f(x)=3x^2-5x+a$,根据条件,结合函数图像,可得 $\begin{cases}f(-2)=22+a>0,\\f(0)=a<0,\\f(1)=-2+a<0,\\f(3)=12+a>0,\end{cases}$

解得 $-12<a<0$.

所以,实数 a 的取值范围为 $(-12,0)$.

21.**解**:设应裁员 x 人,盈利为 y 万元,则 $y=(2a-x)(1+0.01x)b-0.4bx=b[-0.01x^2-(1.4-0.02a)x]+2ab=-\frac{b}{100}[x^2-2(a-70)x]+2ab$,

对称轴为 $x=a-70$.

因为 $2a-x\geqslant\frac{3}{4}\cdot 2a$,所以 $0<x\leqslant\frac{a}{2}$.

因为 $140<2a<280$,

所以 $70<a<140$,$a-70-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-70<0$.所以 $a-70<\frac{a}{2}$.

所以当 $x=a-70$ 时,y 取得最大值.故应裁员 $(a-70)$ 人.

22.**解**:(1)由已知令 x=y=0,可得 f(0+0)=f(0)+f(0),所以 f(0)=0.

由 f(1)=2,得 f(2)=f(1)+f(1)=2+2=4,f(3)=f(2)+f(1)=6.

(2)任取 $x_1,x_2\in R$ 且 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$,且 $f(x_2-x_1)>0$,

又因为 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)>0$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 f(x)为 R 上的增函数.

(3)$f(4^x-a)+f(6+2^{x+1})>6$ 恒成立,

由已知及(1)即为 $f(4^x-a+6+2^{x+1})>f(3)$ 恒成立.

因为 f(x)为 R 上的增函数,

所以 $4^x-a+6+2^{x+1}>3$ 恒成立,

即 $4^x+2\times 2^x+3>a$ 恒成立.

令 $g(x)=4^x+2\times 2^x+3=(2^x+1)^2+2$.

因为 $2^x>0$,所以 $g(x)>3$,所以 $a\leqslant 3$.

即 a 的取值范围是(-∞,3].

数学·北师大(必修1)

第12期

第2、3版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.B

提示:$P=M\cap N=\{1,3\}$，故P的子集有$2^2=4$个,故选B.

2.D　3.B　4.C　5.B　6.B

7.A

提示:因为函数$y=\frac{1}{2}x^2-2x+4=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$,其图像的对称轴为直线$x=2$,所以在定义域$[2,2b]$上,$y$为增函数.

当$x=2$时,$y=2$;当$x=2b$时,$y=2b$.

故$2b=\frac{1}{2}\times(2b)^2-2\times2b+4$，即$b^2-3b+2=0$,得$b=2$,或$b=1$.又因为$b>1$,所以$b=2$.

8.B

提示:将不等式变形为$2^{-x}-3^x>2^y-3^{-y}$,令$f(x)=2^{-x}-3^x$,则$f(x)$为减函数,又$f(x)>f(-y)$,所以$x<-y$,所以$x+y<0$.

9.D

10.D

提示:设$\frac{M}{N}=x=\frac{3^{361}}{10^{80}}$,两边取对数,$\lg x=\lg\frac{3^{361}}{10^{80}}=\lg3^{361}-\lg10^{80}=361\times\lg3-80=93.28$,所以$x=10^{93.28}$,即$\frac{M}{N}$最接近$10^{93}$.

11.B

提示:因为$f(4)=a^{4-2}=a^2>0$,

又$f(4)g(-4)<0$,

所以$g(-4)=\log_a|-4|=\log_a4<0$,

所以$0<a<1$,所以$f(x)$在R上单调递减,过点$(2,1)$,故排除A、C.又$g(x)$为偶函数,其图像在$(0,+\infty)$上单调递减,排除D.故选B.

12.C

提示:因为$x>0$时,$f(x)$单调且为偶函数,所以$|2x|=\left|\frac{x+1}{x+4}\right|$,

即$2x(x+4)=\pm(x+1)$.所以$2x^2+9x+1=0$,或$2x^2+7x-1=0$.

所以共有四根.因为$x_1+x_2=-\frac{9}{2}$,$x_3+x_4=-\frac{7}{2}$,所以所有x之和为$-\frac{9}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right)=-8$.

二、填空题

13.$(2,2)$

14.2

提示:令$f(x)=\ln x-6+2x$,则$f(1)=\ln1-6+2=-4<0$,$f(2)=\ln2-6+4=\ln2-2<0$,$f(3)=\ln3>0$,所以$2<x_0<3$.所以不等式$x\leqslant x_0$的最大整数解为2.

15.$(-1,2)$

提示:$|f(x+1)|<1\Leftrightarrow-1<f(x+1)<1\Leftrightarrow f(0)<f(x+1)<f(3)$,

又因为$y=f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,

所以$0<x+1<3$,所以$-1<x<2$,

所以不等式的解集为$(-1,2)$.

16.$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)由已知得$A=\{x|0<x\leqslant2\}$,

当$a=0$时,$B=\left\{x\left|\frac{1}{4}<2^{x-a}\leqslant8\right.\right\}$

$=\{x|-2<x\leqslant3\}$,

所以$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\leqslant0$或$x>2\}$,

所以$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|x\leqslant0$或$x>2\}\cap\{x|-2<x\leqslant3\}=\{x|-2<x\leqslant0$或$2<x\leqslant3\}$.

(2)若$A\cup B=B$,则$A\subseteq B$,

又$B=\left\{x\left|\frac{1}{4}<2^{x-a}\leqslant8\right.\right\}$

$=\{x|-2<x-a\leqslant3\}$

$=\{x|a-2<x\leqslant a+3\}$,

故$a-2\leqslant0$,$a+3\geqslant2$,

解得$-1\leqslant a\leqslant2$,

故实数a的取值范围为$[-1,2]$.

18.**解**:(1)令$\log_a x=t(t\in\mathbf{R})$,则$x=a^t$,

所以$f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$.

故所求解析式为$f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$ $(x\in\mathbf{R})$.

(2)因为$f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-\frac{a}{a^2-1}\cdot(a^x-a^{-x})=-f(x)$,所以$f(x)$为奇函数.

当$a>1$时,$y=a^x$为增函数,$y=-a^{-x}$为增函数,且$\frac{a^2}{a^2-1}>0$,所以$f(x)$为增函数;

当$0<a<1$时,$y=a^x$为减函数,$y=-a^{-x}$为减函数,且$\frac{a^2}{a^2-1}<0$,所以$f(x)$为增函数.

综上,$f(x)$在R上为增函数.

19.**解**:(1)由已知,得$\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=2$,

解得$a=1$.

(2)由(1)知$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

故$h(x)=g(x)-f(x)=4^{-x}-2-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

令$h(x)=0$,得$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-\left(\frac{1}{2}\right)^x-2=0$,

即$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-2\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x+1\right]=0$.

故$\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$,解得$x=-1$.

故所求零点为-1.

20.**解**:因为$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$在$x\in(0,+\infty)$上有$y>1$,所以$\frac{1}{a}>1$,即$0<a<1$.

于是由$\log_a(x-1)\leqslant\log_a(6-x)$,

得$\begin{cases}x-1\geqslant6-x,\\6-x>0,\\x-1>0,\end{cases}$解得$\frac{7}{2}\leqslant x<6$.

所以原不等式的解集为$\left\{x\left|\frac{7}{2}\leqslant x<6\right.\right\}$.

21.**解**:(1)任取$x_1,x_2\in[-1,1]$,且$x_1<x_2$,则$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=\frac{f(x_2)+f(-x_1)}{x_2+(-x_1)}\cdot(x_2-x_1)>0$,即$f(x_2)>f(x_1)$.所以$f(x)$为增函数.

因为$f\left(x+\frac{1}{2}\right)<f(1-x)$,

所以$\begin{cases}-1\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant1,\\-1\leqslant1-x\leqslant1,\\x+\frac{1}{2}<1-x,\end{cases}$解得$0\leqslant x<\frac{1}{4}$.

所以不等式$f\left(x+\frac{1}{2}\right)<f(1-x)$的解集为$\left\{x\left|0\leqslant x<\frac{1}{4}\right.\right\}$.

(2)由于$f(x)$为增函数,所以$f(x)$的最大值为$f(1)=1$.

因为$f(x)\leqslant-2at+2$对所有$x\in[-1,1]$,$a\in[2,3]$恒成立,所以$-2at+2\geqslant1$对任意$a\in[2,3]$恒成立,即$2at\leqslant1$对任意$a\in[2,3]$恒成立,所以$t\leqslant\frac{1}{6}$.

故实数t的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{6}\right]$.

22.**解**:(1)当$t=4$时,$s=\frac{1}{2}\times4\times3\times4=24$.

(2)当$0\leqslant t\leqslant10$时,$OT=t$,$TD=3t$(如图1),所以$s=\frac{1}{2}t\cdot3t=\frac{3}{2}t^2$.

当$10<t\leqslant20$时,$OT=t$,$AD=ET=t-10$,$TD=30$(如图2),

所以$s=S_{梯形ADTO}=\frac{1}{2}(t-10+t)\times30=30t-150$.

当$20<t\leqslant35$时,由点$B(20,30)$,$C(35,0)$,得一次函数$v=-2t+70$,所以点$D(t,-2t+70)$.

所以$TC=35-t$,$TD=-2t+70$(如图3),

所以$s=S_{梯形OABC}-S_{\triangle DCT}=\frac{1}{2}\times(10+35)\times30-\frac{1}{2}(35-t)(-2t+70)=-(35-t)^2+675$.

综上,$s=\begin{cases}\frac{3}{2}t^2,0\leqslant t\leqslant10,\\30t-150,10<t\leqslant20,\\-(35-t)^2+675,20<t\leqslant35.\end{cases}$

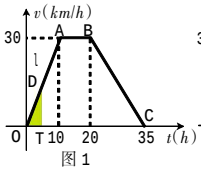


图1

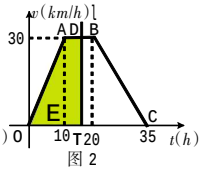


图2

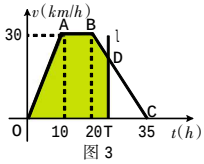


图3

(3)当$0\leqslant t\leqslant10$时,$s_{max}=150\leqslant650$,沙尘暴不会侵袭到N城.

当$10<t\leqslant20$时,$s_{max}=450\leqslant650$,沙尘暴不会侵袭到N城.

当$20<t\leqslant35$时,$s_{max}=675>650$,沙尘暴会侵袭到N城.

令$-(35-t)^2+675=650$,

解得$t=30$,或$t=40$(舍去).

所以在沙尘暴发生30h后它将侵袭到N城.