

数学·高考版(文)

第1期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.A 4.C 5.D 6.A

7.D 8.C 9.A 10.C 11.B

12.C

提示:由题设,易验证函数 $f(x)=x^3+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$,即函数 $f(x)$ 是奇函数,易知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.又已知不等式可化为 $f(\frac{a-3a^2}{a^3-3}) < f(-1)$,所以 $\frac{a-3a^2}{a^3-3} < -1$,即 $\frac{a-3a^2+a^3-3}{a^3-3} < 0$,也即 $\frac{(a-3)(a^2+1)}{a^3-3} < 0$,解得 $\sqrt[3]{3} < a < 3$,故选C.

二、填空题

13. $[-5, 1) \cup (1, +\infty)$

14. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

15. $(a^2, \frac{b}{2}) \cup (-\frac{b}{2}, -a^2)$

16. $[-1, +\infty)$

提示:因为 $x \in [1, 2]$ 及 $y \in [2, 3]$,所以由 $xy \leq ax^2+2y^2$,得 $a \geq \frac{xy-2y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - 2(\frac{y}{x})^2$.

令 $t = \frac{y}{x}$,结合 $x \in [1, 2]$ 及 $y \in [2, 3]$,可得 $1 \leq t \leq 3$,于是问题转化为 $a \geq -2t^2+t$ 在 $t \in [1, 3]$ 上恒成立.显然 $f(t) = -2t^2+t$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减,所以当 $t=1$ 时, $f(t)$ 取得最大值且为-1,所以 $a \geq -1$.

三、解答题

17.证明:要证 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{c}{1+c}$,

只需证 $a(1+b)(1+c)+b(1+a)(1+c)>c(1+b)(1+a)$,

只需证 $a(1+b+c+bc)+b(1+a+c+ac)>c(1+a+b+ab)$,

只需证 $a+2ab+b+abc>c$.

因为 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边,

所以 $a>0, b>0, c>0$ 且 $a+b>c, abc>0, 2ab>0$,所以 $a+2ab+b+abc>c$ 成立,

所以 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{c}{1+c}$ 成立.

18.(1)解: $f(x) = |2x-1| + x + \frac{1}{2} =$

$\begin{cases} 3x-\frac{1}{2}, & x \geq \frac{1}{2}, \\ -x+\frac{3}{2}, & x < \frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以 $[f(x)]_{\min} = f(\frac{1}{2}) = 1$,

所以 $m=1$.

(2)证明:因为 $a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a^2-b^2) \cdot (a-b)=(a-b)^2(a+b) \geq 0, a+b+c=1$,所以 $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2=ab(a+b)=ab(1-c)=ab-abc$.同理可证: $b^3+c^3 \geq bc-abc, c^3+a^3 \geq ca-abc$.三式相加,得 $2(a^3+b^3+c^3) \geq ab+bc+ca-3abc$.

19.解:(1)要使不等式 $mx^2-2x-m+1<0$

恒成立,只需 $\begin{cases} m<0, \\ \Delta=(-2)^2-4m(-m+1)<0, \end{cases}$ 该不等式组无解.所以不存在实数 m ,使对所有的实数 x ,不等式 $mx^2-2x-m+1<0$ 恒成立.

(2)由 $|m| \leq 2$,得 $-2 \leq m \leq 2$.

由 $mx^2-2x-m+1<0$,

得 $(x^2-1)m-2x+1<0$.

令 $f(m)=(x^2-1)m-2x+1(-2 \leq m \leq 2)$,

则 $f(m)<0$.

当 $x=1$ 时, $f(m)=-1<0$,满足题意;

当 $x=-1$ 时, $f(m)=3>0$,不满足题意;

当 $x \neq \pm 1$ 时,要使 $f(m)<0$,

只需 $\begin{cases} f(-2)<0, \\ f(2)<0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (x^2-1)(-2)-2x+1<0, \\ (x^2-1) \times 2-2x+1<0, \end{cases}$

解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

综上, x 的取值范围是

$(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$.

20.解:(1)原不等式可化为 $|x-2|>4-x^2$,即 $x-2>4-x^2$,或 $x-2<-4-x^2$.

由 $x-2>4-x^2$,得 $x>2$,或 $x<-3$;

由 $x-2<-4-x^2$,得 $x>2$,或 $x<-1$.

综上,原不等式的解集为 $\{x|x>2, \text{或} x<-3\}$.

(2)关于 x 的不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集非空等价于 $|x-2|+|x+7|<3m$ 的解集非空,

令 $h(x)=|x-2|+|x+7|$,

即 $[h(x)]_{\min}<3m$.

由 $|x-2|+|x+7| \geq |x-2-x-7|=9$,

所以 $[h(x)]_{\min}=9$,

由 $3m>9$,解得 $m>3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(3, +\infty)$

21.解:(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=|x-1|+|2x-1|$, $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow |x-1|+|2x-1| \leq 2$,

上述不等式可化为 $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x+1-2x \leq 2, \end{cases}$ 或

$\begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1, \\ 1-x+2x-1 \leq 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x-1+2x-1 \leq 2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1, \\ x \leq 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq \frac{4}{3}, \end{cases}$

所以 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,或 $\frac{1}{2} < x < 1$,或 $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$,

$\frac{4}{3}$.

所以原不等式的解集为 $\{x|0 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$.

(2)因为 $f(x) \leq |2x+1|$ 的解集包含 $[\frac{1}{2}, 1]$,

所以当 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时,

不等式 $f(x) \leq |2x+1|$ 恒成立,

即 $|x-a|+|2x-1| \leq |2x+1|$ 在 $x \in$

$[\frac{1}{2}, 1]$ 上恒成立.

所以 $|x-a|+2x-1 \leq 2x+1$,

即 $|x-a| \leq 2$,

所以 $-2 \leq x-a \leq 2$,

所以 $x-2 \leq a \leq x+2$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 上恒成立,

所以 $(x-2)_{\max} \leq a \leq (x+2)_{\min}$,

所以 $-1 \leq a \leq \frac{5}{2}$,

所以实数 a 的取值范围是 $[-1, \frac{5}{2}]$.

22.解:(1)因为 $k>0, f(x)>m$,

即 $\frac{kx}{x^2+3k}>m$,

所以 $mx^2-kx+3km<0$.

因为不等式 $mx^2-kx+3km<0$ 的解集为 $\{x|x<-3, \text{或} x>-2\}$,

所以-3, -2是方程 $mx^2-kx+3km=0$ 的根,且 $m<0$,

所以 $\begin{cases} \frac{k}{m}=-5, \\ 3k=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=2, \\ m=-\frac{2}{5}. \end{cases}$

所以 $5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0 \Leftrightarrow 2x^2-x-3<0$,

解得 $-1< x < \frac{3}{2}$,

所以不等式 $5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0$ 的解集为

$\{x|-1< x < \frac{3}{2}\}$.

(2)因为 $f(x)>1$,所以 $\frac{kx}{x^2+3k}>1$,所以

$x^2-kx+3k<0$,令 $g(x)=x^2-kx+3k, x \in (3, +\infty)$,存在 $x_0>3$,使得 $f(x_0)>1$ 成立,即存在 $g(x_0)<0$ 成立,即 $[g(x)]_{\min}<0$ 成立.当 $0<k \leq 6$ 时, $g(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)>g(3)=9$,显然不存在 $g(x)<0$;当 $k>6$ 时, $g(x)$ 在 $(3, \frac{k}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{k}{2}, +\infty)$ 上单调递增,所以 $[g(x)]_{\min}=g(\frac{k}{2})=-\frac{k^2}{4}+3k$,由 $-\frac{k^2}{4}+3k<0$,又 $k>0$,可得 $k>12$.

综上, k 的取值范围是 $(12, +\infty)$.