

数学·高考版(文)

第5期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.A 3.C 4.D 5.A 6.C

7.C 8.B 9.D 10.B 11.A

12.B

提示: $f(x)$ 为分段函数,易得其值域为 \mathbf{R} .

因为 $f(x)=2^x(x<0)$ 的值域为 $(0,1)$,
 $f(x)=\log_2 x(x>0)$ 的值域为 \mathbf{R} ,

所以 $f(x)$ 的函数值在 $(0,1)$ 上有两个解,所以若存在唯一的 x ,满足 $f(f(x))=8a^2+2a(a>0)$,则有 $f(f(x))\geq 1$,即 $f(x)\geq 2$,解得 $x\geq 4$,所以当 $x\geq 4$ 时,存在唯一的 x ,满足 $f(f(x))=8a^2+2a(a>0)$,所以 $8a^2+2a\geq 1$,解得 $a\leq -\frac{1}{2}$ (舍去),或 $a\geq \frac{1}{4}$,所以 a 的最小值为 $\frac{1}{4}$.故选B.

二、填空题

13.1

14. $(-\infty, 0)$

15. $(-\frac{3}{4}, +\infty)$

16.2

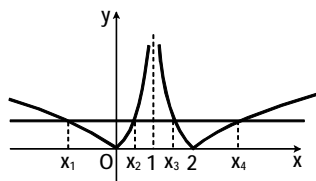
提示:函数 $f(x)=|\log_a|x-1||$ ($a>0$,且 $a\neq 1$)的图象如图所示.

由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow |\log_a|x_1-1||=|\log_a|x_2-1||$,且 $|x_1-1|>1, 0<|x_2-1|<1$,
所以必有 $\log_a|x_1-1|=-\log_a|x_2-1|$,
所以 $\log_a|x_1-1|+\log_a|x_2-1|=0\Rightarrow (1-x_1)(1-x_2)=1$,

所以 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1=1\Rightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)=0\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1$,即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$.

同理,可得 $\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$.

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=2$.



(第16题图)

三、解答题

17.解:(1)原式 $=2-2+\frac{3}{2}+\log_2 4=\frac{7}{2}$.

(2)原式 $=\lg \frac{\sqrt{32}}{7}-\lg 8^{\frac{2}{3}}+\lg \sqrt{245}$

$=\lg \left(\frac{\sqrt{32}}{7} \times \sqrt{245} \div 4 \right)$

$=\lg \sqrt{10}=\frac{1}{2}$.

18.解:(1)依题意,得 $(m-1)^2=1$,
解得 $m=0$ 或 $m=2$.

当 $m=2$ 时,

$f(x)=x^{-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,
不符合题意,舍去.

当 $m=0$ 时, $f(x)=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,符合题意.

所以 $m=0$.

(2)由(1)可知 $f(x)=x^2$.

当 $x\in[1, 2]$ 时,

$f(x), g(x)$ 单调递增,

所以 $A=[1, 4], B=[2-k, 4-k]$.

因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,

所以 $\begin{cases} 2-k\geq 1, \\ 4-k\leq 4, \end{cases}$ 解得 $0\leq k\leq 1$.

故实数 k 的取值范围是 $[0, 1]$.

19.解:(1)设日销售量为 $\frac{k}{e^x}$,

则 $\frac{k}{e^{40}}=10$,所以 $k=10e^{40}$,

所以日利润 $y=(x-30-t)\cdot \frac{10e^{40}}{e^x}$.

所以 $y=\frac{10e^{40}(x-30-t)}{e^x}$ ($35\leq x\leq 41$).

(2) $y'=\frac{10e^{40}(31+t-x)}{e^x}$,

令 $y'=0$,得 $x=31+t$.

①当 $2\leq t\leq 4$ 时, $33\leq 31+t\leq 35$,

所以当 $35\leq x\leq 41$ 时, $y'\leq 0$.

所以当 $x=35$ 时, y 取最大值,最大值为 $10(5-t)e^5$.

②当 $4<t\leq 5$ 时, $35<31+t\leq 36$,函数 y 在 $[35, 31+t]$ 上单调递增,在 $[31+t, 41]$ 上单调递减.

所以当 $x=31+t$ 时, y 取最大值 $10e^{9-t}$.

所以当 $2\leq t\leq 4$ 时, $x=35$ 时,日利润最大值为 $10(5-t)e^5$ 元;

当 $4<t\leq 5$ 时, $x=31+t$ 时,日利润最大值为 $10e^{9-t}$ 元.

20.解:(1)因为 $f(x)$ 为偶函数,所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=f(-x)$,

即 $a^{|x+b|}=a^{|-x+b|}$,

等价于 $|x+b|=|-x+b|$,所以 $b=0$.

(2)记 $h(x)=|x+b|=\begin{cases} x+b, & x\geq -b, \\ -x-b, & x< -b. \end{cases}$

①当 $a>1$ 时,因为 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数,所以 $h(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上也是增函数,

所以 $-b\leq 2$,所以 $b\geq -2$;

②当 $0<a<1$ 时,因为 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数,

所以 $h(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是减函数,但 $h(x)$ 在区间 $[-b, +\infty)$ 上是增函数,故不可能.

综上, $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数时, a, b 应满足的条件为 $a>1$,且 $b\geq -2$.

21.解:(1) $F(x)=2\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}$

($a>0$ 且 $a\neq 1$),

由 $\begin{cases} x+1>0, \\ 1-x>0, \end{cases}$ 解得 $-1<x<1$,

所以函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$.

令 $F(x)=0$,

则 $2\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}=0, (*)$

方程等价于 $\log_a(x+1)^2=\log_a(1-x)$,

即 $(x+1)^2=1-x$,

解得 $x_1=0, x_2=-3$ (舍去).

综上,函数 $F(x)$ 的定义域 D 为 $(-1, 1)$,零点是0.

(2) $m=2\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}=$

$\log_a\left(1-x+\frac{4}{1-x}-4\right)$ ($0\leq x<1$),

则 $a^m=1-x+\frac{4}{1-x}-4$.

设 $1-x=t\in(0, 1]$,

则函数 $y=t+\frac{4}{t}$ 在区间 $(0, 1]$ 内是减

函数,

当 $t=1$,即 $x=0$ 时, $y_{\min}=5$,

所以 $a^m\geq 5-4=1$.

所以当 $a>1$ 时, $m\geq 0$,方程有解;

当 $0<a<1$ 时, $m\leq 0$,方程有解.

综上,当 $a>1$ 时,实数 m 的取值范围是 $[0, +\infty)$;当 $0<a<1$ 时,实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

22.解:(1)因为 $x\in[-1, 1]$,

所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^x\in\left[\frac{1}{3}, 3\right]$,

设 $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x, t\in\left[\frac{1}{3}, 3\right]$,

则 $g(t)=t^2-2at+3=(t-a)^2+3-a^2$.

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,

$[g(t)]_{\min}=h(a)=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{28}{9}-\frac{2a}{3}$;

当 $\frac{1}{3}\leq a\leq 3$ 时,

$[g(t)]_{\min}=h(a)=g(a)=3-a^2$;

当 $a>3$ 时,

$[g(t)]_{\min}=h(a)=g(3)=12-6a$.

所以 $h(a)=\begin{cases} \frac{28}{9}-\frac{2a}{3} & (a<\frac{1}{3}), \\ 3-a^2 & (\frac{1}{3}\leq a\leq 3), \\ 12-6a & (a>3). \end{cases}$

(2)假设满足题意的 m, n 存在,

因为 $h(a)$ 的定义域为 $[n, m]$,

值域为 $[n^2, m^2]$,

又 $m>n>3$ 时,

$h(a)=12-6a$ 在 $(3, +\infty)$ 上是减函数,

所以 $\begin{cases} 12-6m=n^2, \\ 12-6n=m^2, \end{cases}$

相减,得 $6(m-n)=(m-n)(m+n)$.

因为 $m>n>3$,所以 $m-n\neq 0$,

所以 $m+n=6$ 但这与 $m>n>3$ 矛盾,

所以满足题意的 m, n 不存在.

数学·高考版(文)

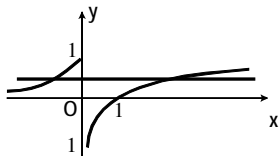
第6期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1.B 2.C 3.A 4.A 5.C 6.D
7.C 8.A 9.C 10.D 11.B
12.A

提示: 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x, & x > 0, \\ a^x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象如图所示, 由 $[f(x)]^2 - bf(x) = 0$, 得 $f(x) \cdot [f(x) - b] = 0$, 则 $f(x) = 0$, 或 $f(x) - b = 0$. 当 $f(x) = 0$ 时, $x = 1$; 当 $f(x) - b = 0$, 即 $b = f(x)$ 时, 通过图象分析 $0 < b \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 与直线 $y = b$ 有两个交点, 故当 $0 < b \leq 1$ 时, 方程 $[f(x)]^2 - bf(x) = 0$ 恰有三个不同的实数根.



(第12题图)

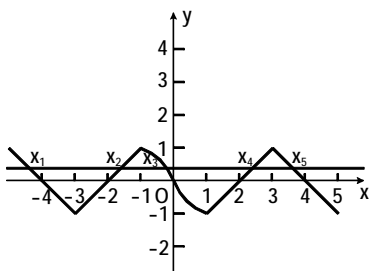
二、填空题

- 13.3 14.2 15. $\frac{1210}{3}$

16. $\frac{1}{1-2\pi}$

提示: 由题意知, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{1-x}, & x \in (-1, 0), \\ |x+3|-1, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的

图象如图所示, 设函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{\pi}$ 交点的横坐标从左到右依次为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 由图象的对称性可知, $x_1 + x_2 = -6, x_4 + x_5 = 6, x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$. 令 $\frac{-2x}{1-x} = \frac{1}{\pi}$, 解得 $x_3 = \frac{1}{1-2\pi}$, 所以函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}$ 的所有零点之和为 $\frac{1}{1-2\pi}$.



(第16题图)

三、解答题

17.解: 由题意, 得 $y = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的定义域满足 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 9, \\ 1 \leq x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

故 $y = (2 + \log_3 x)^2 + 2 + \log_3 x^2 = (\log_3 x + 3)^2 - 3, x \in [1, 3]$.

令 $t = \log_3 x$, 则 $t \in [0, 1]$. 因为 $y = (t+3)^2 - 3$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $t = 1$, 即 $x = 3$ 时, y 取得最大值, 最大值为 13.

18.解: (1) 由题意, 知 $b = 4^x - 2^{x+1}$.

因为 $4^x - 2^{x+1} = (2^x)^2 - 2 \times 2^x = (2^x - 1)^2 - 1 \geq -1$, 所以当 $b \in [-1, +\infty)$ 时, 方程有实数解.

(2) ① 当 $b = -1$ 时, $2^x = 1$, 所以此时方程有唯一解 $x = 0$;

② 当 $b > -1$ 时, 因为 $(2^x - 1)^2 = 1 + b \Rightarrow 2^x = 1 \pm \sqrt{1+b}$, 因为 $2^x > 0, 1 + \sqrt{1+b} > 0$, 所以 $2^x = 1 + \sqrt{1+b}$ 的解为 $x = \log_2(1 + \sqrt{1+b})$.

令 $1 - \sqrt{1+b} > 0 \Rightarrow \sqrt{1+b} < 1 \Rightarrow -1 < b < 0$,

所以当 $-1 < b < 0$ 时, $2^x = 1 - \sqrt{1+b}$ 的解为 $x = \log_2(1 - \sqrt{1+b})$.

综上, 得当 $-1 < b < 0$ 时原方程有两解, $x = \log_2(1 \pm \sqrt{1+b})$; 当 $b \geq 0$ 或 $b = -1$ 时, 原方程有唯一解 $x = \log_2(1 + \sqrt{1+b})$; 当 $b < -1$ 时, 原方程无解.

19.解: (1) $y_1 = (10-a)x - 20 (1 \leq x \leq 200, x \in \mathbb{N}_+)$,

$y_2 = -0.05x^2 + 10x - 40 (1 \leq x \leq 120, x \in \mathbb{N}_+)$.

(2) 因为 $10-a > 0$, 所以 y_1 为增函数,

所以当 $x = 200$ 时, y_1 取得最大值 $1980 - 200a$, 即投资生产甲产品的最大年利润为 $(1980 - 200a)$ 万美元.

因为 $y_2 = -0.05(x-100)^2 + 460 (1 \leq x \leq 120, x \in \mathbb{N}_+)$,

所以当 $x = 100$ 时, y_2 取得最大值 460, 即投资生产乙产品的最大年利润为 460 万美元.

(3) 为研究生产哪种产品年利润最大, 我们采用作差法比较:

由(2)知生产甲产品的最大年利润为 $(1980 - 200a)$ 万美元, 生产乙产品的最大年利润为 460 万美元,

$(1980 - 200a) - 460 = 1520 - 200a$, 且 $6 \leq a \leq 8$,

当 $1520 - 200a > 0$, 即 $6 \leq a < 7.6$ 时, 投资生产甲产品 200 件可获得最大年利润;

当 $1520 - 200a = 0$, 即 $a = 7.6$ 时, 生产甲产品与生产乙产品均可获得最大年利润;

当 $1520 - 200a < 0$, 即 $7.6 < a \leq 8$ 时, 投资生产乙产品 100 件可获得最大年利润.

20.解: (1) $h(x) = \log_a(x-1) - \log_{\frac{1}{a}}(3-x) = \log_a(x-1)(3-x)$,

由 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-x > 0, \end{cases}$ 得 $1 < x < 3$, 所以函数 $h(x)$ 的定义域为 $(1, 3)$.

令 $t = (x-1)(3-x)$, 而 $x \in (1, 3)$,

所以 $t \in (0, 1]$.

当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a t \geq 0$, 即 $h(x) \geq 0$,

当 $a > 1$ 时, $\log_a t \leq 0$, 即 $h(x) \leq 0$,

所以当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $h(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$; 当 $a > 1$ 时, 函数 $h(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0]$.

(2) 由 $f(x) + g(x) \geq 0$, 得 $f(x) \geq -g(x)$, 即 $\log_a(x-1) \geq \log_a(3-x)$, ①

当 $0 < a < 1$ 时, 要使不等式①成立,

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-x > 0, \end{cases} \quad \text{即 } 1 < x \leq 2;$$

$$x-1 \leq 3-x,$$

当 $a > 1$ 时, 要使不等式①成立,

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-x > 0, \end{cases} \quad \text{即 } 2 \leq x < 3.$$

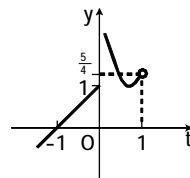
$$x-1 \geq 3-x,$$

综上所述, 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $f(x) + g(x) \geq 0$ 中 x 的取值范围为 $(1, 2]$; 当 $a > 1$ 时, 不等式 $f(x) + g(x) \geq 0$ 中 x 的取值范围为 $[2, 3)$.

21.解: (1) 由题意知, $g(f(1)) = g(-3) = -3 + 1 = -2$.

(2) 令 $f(x) = t$, 则原方程化为 $g(t) = a$. 易知方程 $f(x) = t$ 在 $t \in (-\infty, 1)$ 内有 2 个不同的实数根, 则原方程有 4 个实数根等价于函数 $y = g(t) (t < 1)$ 与 $y = a$ 的图象有 2 个不同的交点. 作出函数 $y = g(t) (t < 1)$ 的图象

(如图所示), 由图象可知, 当 $1 \leq a < \frac{5}{4}$ 时, 函数 $y = g(t) (t < 1)$ 与 $y = a$ 有 2 个不同的交点, 即所求 a 的取值范围是 $[1, \frac{5}{4})$.



(第21题图)

22.解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^3 + x^2 - x + m$, 因为 $f(x)$ 有三个互不相同的零点,

所以方程 $x^3 + x^2 - x + m = 0$ 有三个互不相同的实数根, 即 $y = -x^3 - x^2 + x$ 与 $y = -m$ 的图象有三个交点.

令 $g(x) = -x^3 - x^2 + x$,

则 $g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -(3x-1)(x+1)$.

令 $g'(x) > 0$, 得 $-1 < x < \frac{1}{3}$;

令 $g'(x) < 0$, 得 $x < -1$, 或 $x > \frac{1}{3}$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上

为减函数, 在 $(-1, \frac{1}{3})$ 内为增函数, 所以

$[g(x)]_{\text{极小值}} = g(-1) = -1, [g(x)]_{\text{极大值}} = g(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, 所以 $-1 < m < \frac{5}{27}$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-1, \frac{5}{27})$.

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$, 由题设可知, 方程 $3x^2 + 2ax - a^2 = 0 (a > 0)$ 在 $[-1, 1]$ 上没有实数根.

方程 $3x^2 + 2ax - a^2 = 0$ 的根为 $x_1 = -a < 0, x_2 = \frac{a}{3} > 0$. 若方程 $f'(x) = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上没有

实数根, 则 $-a < -1$, 且 $\frac{a}{3} > 1$, 解得 $a > 3$.

所以实数 a 的取值范围为 $(3, +\infty)$.

数学·高考版(文)

第7期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.A 3.B 4.D 5.C 6.D

7.D 8.D 9.A 10.D 11.D

12.A

提示:由题意,知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = 2ax + \frac{1}{x}$. 因为存在垂直于 y 轴的切线, 故此时斜率为 0, 问题转化为在 $(0, +\infty)$ 内导函数 $f'(x) = 2ax + \frac{1}{x}$ 存在零点. 再将之转化为 $g(x) = -2ax$ 与 $h(x) = \frac{1}{x}$ 存在交点. 当 $a=0$ 时, 不符合题意; 当 $a>0$ 时, 如图 1, 可知显然没有交点; 当 $a<0$ 时, 如图 2, 此时正好有一个交点, 故 $a<0$ 满足题意, 故选 A.

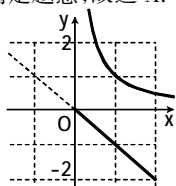


图 1

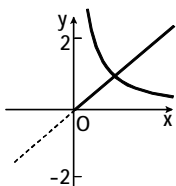


图 2

(第 12 题图)

二、填空题

13.-20 14.0 15. $\frac{\pi}{4}$

16.①②④

提示:由导函数的图象可知, 当 $-1 < x < 0$ 和 $2 < x < 4$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $0 < x < 2$ 和 $4 < x < 5$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减. 当 $x=0$ 及 $x=4$ 时, 函数取得极大值 $f(0)=2$, $f(4)=2$; 当 $x=2$ 时, 函数取得极小值 $f(2)=1.5$. 又 $f(-1)=f(5)=1$, 所以函数的最大值为 2, 最小值为 1, 值域为 $[1, 2]$. ①②正确; 因为当 $x=0$ 及 $x=4$ 时, 函数取得极大值 $f(0)=2$, $f(4)=2$, 要使当 $x \in [-1, t]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值是 2, 则 $0 \leq t \leq 5$, 所以 t 的最大值是 5, 所以③不正确; 因为极小值 $f(2)=1.5$, 极大值 $f(0)=f(4)=2$, 所以当 $1 < a < 2$ 时, $y=f(x)-a$ 最多有 4 个零点, 所以④正确, 所以正确命题的序号为 ①②④.

三、解答题

17.解: (1) 化简, 得 $f(x) = \frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x) = \left(\frac{2e^x}{1-x} \right)' = \frac{(2e^x)'(1-x) - 2e^x(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$, 所以 $f'(2)=0$.

(2) 因为 $f'(x) = \left(x^{-\frac{3}{2}} \right)' - x' + (\ln x)'$
 $= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{x}$,
 所以 $f'(1) = -\frac{3}{2}$.

18.解: (1) $f'(x) = 3x^2 - 3$.

因为 P 为切点, 所以直线 l 的斜率 $k_1 = f'(1) = 0$, 所以所求直线 l 的方程为 $y = -2$.
 (2) 设切点坐标为 $(x_0, x_0^3 - 3x_0)$ ($x_0 \neq 1$), 则直线 l 的斜率 $k_2 = f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$, 所以直线 l 的方程为 $y - (x_0^3 - 3x_0) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$.

又直线 l 过点 $P(1, -2)$, 所以 $-2 - (x_0^3 - 3x_0) = (3x_0^2 - 3)(1 - x_0)$,

解得 $x_0 = 1$ (舍去) 或 $x_0 = -\frac{1}{2}$.

故所求直线 l 的斜率 $k_2 = 3x_0^2 - 3 = -\frac{9}{4}$,

所以直线 l 的方程为

$y - (-2) = -\frac{9}{4}(x - 1)$,

即 $y = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$.

19. (1) 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x} e^x - \frac{b}{x^2} e^{x-1} + \frac{b}{x} e^{x-1}$,

由题意可得 $f(1) = 2$, $f'(1) = e$,

则 $\begin{cases} b=2, \\ ae-b+b=e, \end{cases}$ 解得 $a=1, b=2$.

(2) 证明: 由 (1), 知 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} e^x - 1$,

从而 $f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x > x e^{-x} - \frac{2}{e}$.

设函数 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$,

所以当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减,

在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增,

从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为

$g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x) = x e^{-x} - \frac{2}{e}$,

则 $h'(x) = e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为

$h(1) = -\frac{1}{e}$.

综上, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x)$, 即 $f(x) > 1$.

20.解: (1) 因为函数 $f(x) = \frac{a(x-1)}{x^2}$,

所以

$f'(x) = \frac{[a(x-1)]' \cdot x^2 - (x^2)' a(x-1)}{x^4} = \frac{a(2-x)}{x^3}$.

由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 2$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > 2$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$,

单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$.

(2) 设切点为 (x, y) ,

由切线斜率 $k = 1 = \frac{a(2-x)}{x^3}$,

得 $x^3 = -ax + 2a$. ①

由 $x - y - 1 = x - \frac{a(x-1)}{x^2} - 1 = 0$,

得 $(x^2 - a)(x - 1) = 0$.

解得 $x = 1$, 或 $x = \sqrt{a}$, 或 $x = -\sqrt{a}$.

把 $x = 1$ 代入①, 得 $a = 1$;

把 $x = \sqrt{a}$ 代入①, 得 $a = 1$;

把 $x = -\sqrt{a}$ 代入①, 方程无解.

故所求实数 a 的值为 1.

(3) 因为 $g(x) = x \ln x - x^2 f(x) = x \ln x - a(x-1)$,

所以 $g'(x) = \ln x + 1 - a$.

令 $\ln x + 1 - a = 0$, 得 $x = e^{a-1}$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(e^{a-1}, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(0, e^{a-1})$ 上单调递减.

① 当 $e^{a-1} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增, 其最小值为 $g(1) = 0$;

② 当 $1 < e^{a-1} < e$, 即 $1 < a < 2$ 时, $g(x)$ 的最小值为 $g(e^{a-1}) = a - e^{a-1}$;

③ 当 $e^{a-1} \geq e$, 即 $a \geq 2$ 时, $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减, 其最小值为 $g(e) = e + a - ae$.

21. (1) 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $f'(x) = \frac{a}{x} + x - (a+1) = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x}$

$= \frac{(x-1)(x-a)}{x}$,

又因为函数 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 所以不等式 $(x-1)(x-a) \leq 0$ 在 $(1, 3)$ 上成立.

设 $g(x) = (x-1)(x-a)$, 则 $g(3) \leq 0$,

即 $2(3-a) \leq 0$, 解得 $a \geq 3$.

所以 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

(2) 证明: 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -\ln x + \frac{x^2}{2}$,

$f'(x) = -\frac{1}{x} + x = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 或 $x = -1$ (舍去).

当 x 变化时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $x = 1$ 时,

函数 $f(x)$ 取得极小值, 也是最小值,

为 $f(1) = \frac{1}{2}$.

所以 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 成立.

22. 解: (1) 当 $a = 2$ 时, $g(x) = 4x^2 - \ln x + 2$, 则 $g'(x) = 8x - \frac{1}{x}$.

曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线斜率 $k = g'(1) = 7$, 又 $g(1) = 6$,

曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线的方程为 $y - 6 = 7(x - 1)$, 即 $y = 7x - 1$.

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x) = ax + \ln x - a^2 x^2$ ($x > 0$).

假设存在负数 a , 使得 $f(x) \leq g(x)$ 对一切正数 x 都成立.

即当 $x > 0$ 时, $[h(x)]_{\max} \leq 0$.

$h'(x) = a + \frac{1}{x} - 2a^2 x = \frac{-2a^2 x^2 + ax + 1}{x}$ ($x > 0$).

令 $h'(x) = 0$, 可得 $x_1 = -\frac{1}{2a}$, $x_2 = \frac{1}{a}$ (舍去).

当 $0 < x < -\frac{1}{2a}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x > -\frac{1}{2a}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2a}$ 处有极大值, 也是

最大值.

所以 $[h(x)]_{\max} = h(-\frac{1}{2a}) = \ln(-\frac{1}{2a}) - \frac{3}{4} \leq 0$,

解得 $a \leq -\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}}$.

所以存在负数 a , 满足题意, a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}}]$.

数学·高考版(文)

第8期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A 2.A 3.B 4.C 5.A 6.A

7.C 8.C 9.B 10.B 11.D

12.B

提示:由 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - kx = 0$, 得 $k = \frac{\ln x}{x^2}$.

由题意,得 $k = \frac{\ln x}{x^2}$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上有两个解.

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$.

令 $g'(x) = 0$, $x = \sqrt{e}$,

当 $\frac{1}{e} < x < \sqrt{e}$ 时, $g'(x) > 0$;

当 $\sqrt{e} < x < e^2$ 时, $g'(x) < 0$.

因此, $x = \sqrt{e}$ 是 $g(x)$ 的唯一极大值点,也是最大值点, $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$,

又 $g(\frac{1}{e}) = -e^2$, $g(e^2) = \frac{2}{e^4}$,

所以当 $\frac{2}{e^4} \leq k < \frac{1}{2e}$ 时,直线 $y=k$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象在区间 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上有两个交点,即方程 $k = \frac{\ln x}{x^2}$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上有两个解.故选 B.

二、填空题

13.1 14.2:1 15.0

16. $[\frac{2}{e-2}, +\infty)$

提示:当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{x} = e^{2x} + \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{e^{2x} \cdot \frac{1}{x}} = 2e$, 当且仅当 $x = \frac{1}{e}$ 时取等号,所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 有最小值 $2e$. 因为 $g(x) = \frac{e^{2x^2}}{e^x}$, 所以 $g'(x) = \frac{e^{2x^2} \cdot 2x - e^{2x^2}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x^2}(2x-1)}{e^{2x}}$. 当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) > 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增; 当 $x > 2$ 时, $g'(x) < 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x=2$ 时, 函数 $g(x)$ 有最大值 $g(2)=4$, 则当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时, $[f(x_2)]_{\min} = 2e > [g(x_1)]_{\max} = 4$. 因为 $\frac{g(x_1)}{k} \leq \frac{f(x_2)}{k+1}$ 恒成立, 且 $k > 0$, 所以 $\frac{k}{k+1} \geq \frac{4}{2e}$, 所以 $k \geq \frac{2}{e-2}$.

三、解答题

17.解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a$. 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增; 若 $a > 0$, 则当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 内单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 内单调递减.

(2) 由(1)知, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无最大值;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取得最大值,

最大值为 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} + a(1 - \frac{1}{a}) = -\ln a + a - 1$.

因此, $f(\frac{1}{a}) > 2a - 2 \Leftrightarrow \ln a + a - 1 < 0$.

令 $g(a) = \ln a + a - 1$,

则 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是增函数,

$g(1) = 0$, 由 $g(a) < 0$, 得 $0 < a < 1$,

所以 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

18.解: (1) 改进工艺后, 每件纪念品的销售价为 $20(1+x)$ 元, 月平均销售量为 $a(1-x^2)$ 件, 月平均利润 $y = a(1-x^2)[20(1+x) - 15] = 5a(-4x^3 - x^2 + 4x + 1)$ ($0 < x < 1$).

(2) $y' = 5a(-12x^2 - 2x + 4) = -10a(2x - 1)(3x + 2)$ ($0 < x < 1$),

令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ (舍去).

当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $y' > 0$;

当 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $y' < 0$.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, y 有最大值, 此时销售价为 30 元. 所以改进工艺后, 该纪念品的销售价为 30 元时, 使得旅游部门销售纪念品的月平均利润最大.

19.(1) 解: $g(x) = \ln x + x^2 - 3x$,

所以 $g'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3$.

因为 $k = g'(\frac{1}{2}) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = -2$,

所以切线方程为 $y = -2$.

(2) 证明: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$, 要证原

不等式成立只需证 $\frac{1}{x_2} < \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1}$.

因为 $x_2 > x_1$, 即证 $\frac{x_2 - x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}$.

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$ ($t > 1$),

只需证 $1 - \frac{1}{t} < \ln t < t - 1$.

令 $K(t) = \ln t - t + 1$ ($t > 1$),

所以 $K'(t) = \frac{1}{t} - 1 < 0$.

所以 $K(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$K(t) < K(1) = 0$ 成立.

令 $h(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1$ ($t > 1$),

$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} > 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$h(t) > h(1) = 0$ 成立.

综上所述, $\frac{1}{x_2} < k < \frac{1}{x_1}$.

20.(1) 证明: 由 $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 - \sqrt{x} - x$, 得 $h(1) = e - 3 < 0$, $h(2) = e^2 - 3 - \sqrt{2} > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有零点.

(2) 解: 由(1)得 $h(x) = e^x - 1 - \sqrt{x} - x$.

由 $g(x) = \sqrt{x} + x$, 知 $x \in [0, +\infty)$, 而 $h(0) = 0$, 则 $x=0$ 为 $h(x)$ 的一个零点, 又 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 因此 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上至少有两个零点. 因为 $h'(x) = e^x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1$, 记 $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1$, 则 $\varphi'(x) =$

$e^x + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 因此

$\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点, 即 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 至多有两个零点. 所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有两个零点, 所以方程 $f(x) = g(x)$ 的根的个数为 2.

21.(1) 解: 由题意得, $x \ln x - ax^2 - x < -x$ 恒成立,

所以 $x \ln x - ax^2 < 0$ 恒成立,

又 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $a > \frac{\ln x}{x}$ 恒成立.

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

令 $h'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上是增函数;

令 $h'(x) < 0$, 得 $x > e$,

所以 $h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上是减函数,

所以 $[h(x)]_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$.

所以 $a > \frac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(2) 证明: 由(1)得 $h(x) \leq h(e) = \frac{1}{e}$,

所以 $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$.

所以 $\ln x \leq \frac{x}{e} < x$, 即 $\ln x < x$,

所以 $\ln 1 < 1$, $\ln 2 < 2$, $\ln 3 < 3$, \dots , $\ln 2017 < 2017$.

以上各式相加得,

$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln 2017 < 1 + 2 + 3 + \dots + 2017$,

即 $\ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2017) < \frac{2017 \times (1 + 2017)}{2} =$

2017×1009 ,

即 $\frac{1}{1009} \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2017) < 2017$,

所以 $\ln(2 \times 3 \times \dots \times 2017)^{\frac{1}{1009}} < 2017$.

22.解: (1) 当 $m = -2$ 时, $f(x) = e^x(x^3 - 2x^2 - 2x + 2)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$f'(x) = e^x(x^3 - 2x^2 - 2x + 2) + e^x(3x^2 - 4x - 2) =$

$xe^x(x^2 + x - 6) = (x+3)x(x-2)e^x$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -3$, 或 $x = 0$, 或 $x = 2$,

所以当 $x \in (-\infty, -3)$ 和 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-3, 0)$ 和 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递减,

在 $(-3, 0)$ 上单调递增,

在 $(0, 2)$ 上单调递减,

在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-3) = -39e^{-3}$,

$f(x)_{\max} = f(2) = -2e^2$,

$f(x)_{\min} = f(0) = 2$.

(2) $f'(x) = e^x(x^3 + mx^2 - 2x + 2) + e^x(3x^2 + 2mx - 2) = xe^x[x^2 + (m+3)x + 2m - 2]$.

因为 $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递增,

所以当 $x \in [-2, -1]$ 时, $f'(x) \geq 0$.

又当 $x \in [-2, -1]$ 时, $xe^x < 0$,

所以当 $x \in [-2, -1]$ 时,

$x^2 + (m+3)x + 2m - 2 \geq 0$,

所以 $\begin{cases} (-2)^2 - 2(m+3) + 2m - 2 \geq 0, \\ (-1)^2 - (m+3) + 2m - 2 \geq 0, \end{cases}$

解得 $m \leq 4$,

所以当 $m \in (-\infty, 4]$ 时,

$f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递增.