

答案页第 5 期
数学·高考版(文)第 17 期
第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.A 3.A 4.C 5.B 6.D 7.A
8.D 9.C 10.B 11.C

12.B

提示:点 $(\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n-1}})$ 在直线 $x - \sqrt{2}y = 0$ 上,

所以 $\sqrt{a_n} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a_{n-1}} = 0$.

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$. 又 $a_1 = 2$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项,以 2 为公比的等比数列,

则 $a_n = 2^n (n \in \mathbb{N}_+)$,

所以 $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2$.

故选 B.

二、填空题

13.15 14.1024 15. $a_n = 2^n$

16. $\frac{5}{16} - \frac{2n^2+6n+5}{4(n+1)^2(n+2)^2}$

提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

因为 $\frac{\log_2 a_{n+2} - \log_2 a_n}{2} = 1$,

所以 $\log_2 \frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$,所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 4$,

所以 $q^2 = 4$,

又 $\{a_n\}$ 为正项数列,所以 $q = 2$.

又 $S_4 = 30$,所以 $S_4 = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = 30$,

所以 $a_1 = 2$,所以 $a_n = 2^n$.

因为 $b_n = \frac{\log_2 a_{n+1}}{(\log_2 a_{n+2})^2 \cdot (\log_2 a_n)^2}$,

所以 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 \cdot n^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]$.

则 $T_n = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots + \right.$

$\left. \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]$
 $= \frac{5}{16} - \frac{2n^2+6n+5}{4(n+1)^2(n+2)^2}$.

三、解答题

17.解:(1)因为数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是首项为 9,公比为 3 的等比数列,

所以 $a_{n+1} - 3a_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$,

所以 $a_2 - 3a_1 = 9, a_3 - 3a_2 = 27$,

又 $a_1 = 1$,所以 $a_2 = 12, a_3 = 63$.

(2)因为 $a_{n+1} - 3a_n = 3^{n+1}$,所以 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = 1$,所以数列 $\left\{ \frac{a_n}{3^n} \right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$,公差等

于 1 的等差数列,所以数列 $\left\{ \frac{a_n}{3^n} \right\}$ 的前 n 项

和 $S_n = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{6}$.

18.解:(1)由题意可得,电力型公交车按照等比数列的规律增长,

故 $a_7 = 128 \times \left(\frac{3}{2} \right)^6 = 1458$ (辆).

(2)由 $\frac{S_n}{10000 + S_n} > \frac{1}{3}$,得 $S_n > 5000$.

于是 $\frac{128 \times (1-1.5^n)}{1-1.5} > 5000$,

又 $n \in \mathbb{N}_+$,得 $n \geq 8$,即 2020 年底.

答:该市在 2019 年应投入 1458 辆电力型公交车,到 2020 年底,电力型公交车的数量开始超过该市公交车总量的 $\frac{1}{3}$.

19.解:(1)由已知,得 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} = \frac{3}{2} (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m})$,所以 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m-1} = \frac{1}{2} (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m})$,所以 $q = 2$.

由 $a_5 + 2a_4 = a_3 a_6$,得 $a_3 q^2 + 2a_3 q = a_3^2$,即 $q^2 + 2q = a_3$,所以 $a_3 = 8$,所以 $a_n = a_3 q^{n-3} = 2^n$.

(2)因为 $\{b_n\}$ 是递增数列,

所以 $b_{n+1} > b_n$ 对 $n \in \mathbb{N}_+$ 恒成立,

且 $n \in \mathbb{N}_+$ 时, $(n+1-\lambda)2^{n+1} > (n-\lambda)2^n$,

得 $\lambda < n+2$ 对 $n \in \mathbb{N}_+$ 恒成立,即 $\lambda < 3$.

所以实数 λ 的取值范围是 $(-\infty, 3)$.

20.解:(1)因为 $2S_n = 3^n + 3$,

所以 $2a_1 = 3 + 3$,所以 $a_1 = 3$.

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = 3^{n-1} + 3$.

此时, $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = 3^n - 3^{n-1}$,即 $a_n = 3^{n-1}$.

所以 $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 3^{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$

(2)因为 $a_n b_n = \log_3 a_n$,所以 $b_1 = \frac{1}{3}$;

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = 3^{1-n} \log_3 3^{n-1} = (n-1) \cdot 3^{1-n}$.

所以 $T_1 = b_1 = \frac{1}{3}$.

当 $n \geq 2$ 时,

$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \frac{1}{3} + [1 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2} + \cdots$

$+ (n-1)3^{1-n}]$.

所以 $3T_n = 1 + [1 \times 3^0 + 2 \times 3^{-1} + \cdots + (n-1)3^{2-n}]$.

两式相减,得

$2T_n = \frac{2}{3} + (3^0 + 3^{-1} + 3^{2-n}) - (n-1) \cdot 3^{1-n} = \frac{2}{3} +$

$\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}} - (n-1) \cdot 3^{1-n} = \frac{13}{6} - \frac{6n+3}{2 \times 3^n}$,

所以 $T_n = \frac{13}{12} - \frac{6n+3}{4 \times 3^n}$.

经检验, $n=1$ 时也适合,

综上,可得 $T_n = \frac{13}{12} - \frac{6n+3}{4 \times 3^n} (n \in \mathbb{N}_+)$.

21.(1)解:由 $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$,得 $[S_n - (n^2 + n)](S_n + 1) = 0$.

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列,

所以 $S_n > 0$,所以 $S_n = n^2 + n$.

于是 $a_1 = S_1 = 2, n \geq 2$ 时,

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n$.

当 $n=1$ 时,也满足上式,所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$.

(2)证明:由于 $a_n = 2n, b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$,则

$b_n = \frac{n+1}{4n^2(n+2)^2} = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]$.

$T_n = \frac{1}{16} \times \left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots + \right.$

$\left. \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right] = \frac{1}{16} \times$

$\left[1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right] < \frac{1}{16} \times \left(1 + \frac{1}{2^2} \right)$

$= \frac{5}{64}$.

22.(1)证明:因为 $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}_+)$,

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

又因为 $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}$,

所以 $a_n = \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n-1}{4}$.

因为 $b_n = \frac{1}{3} b_{n-1} + \frac{n}{3} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}_+)$,

所以 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n + \frac{n+1}{3} - \frac{2n+1}{4} =$

$\frac{1}{3} b_n - \frac{2n-1}{12} = \frac{1}{3} \left(b_n - \frac{2n-1}{4} \right) = \frac{1}{3} (b_n - a_n)$.

又因为 $b_1 - a_1 = b_1 - \frac{1}{4} \neq 0$,

所以 $\{b_n - a_n\}$ 是以 $b_1 - \frac{1}{4}$ 为首项,以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2)证明:因为 $b_n - a_n = \left(b_1 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$,

$a_n = \frac{2n-1}{4}$,

所以 $b_n = \left(b_1 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{2n-1}{4}$.

当 $n \geq 2$ 时, $b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left(b_1 - \frac{1}{4} \right) \cdot$

$\left(\frac{1}{3} \right)^{n-2}$.

又 $b_1 < 0$,所以 $b_n - b_{n-1} > 0$.

所以 $\{b_n\}$ 是单调递增数列.

(3)解:因为当且仅当 $n=3$ 时, S_n 取最小值,所以 $\begin{cases} b_3 < 0, \\ b_4 > 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} \frac{5}{4} + \left(b_1 - \frac{1}{4} \right) \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 < 0, \\ \frac{7}{4} + \left(b_1 - \frac{1}{4} \right) \times \left(\frac{1}{3} \right)^3 > 0, \end{cases}$

解得 $-47 < b_1 < -11$,

所以 b_1 的取值范围是 $(-47, -11)$.

数学·高考版(文)第 18 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1.A 2.B 3.D 4.B 5.B 6.C 7.B 8.D
9.B 10.D 11.C
12.C

提示:对于①, $\ln(f(a_n)) = \ln \frac{1}{a_n} = -\ln a_n =$

$-\ln(a_n q^{n-1}) = -\ln a_n - (n-1)\ln q$ 为等差数列,故①是“保比差数列函数”,B,D 均错;对于④, $\ln(f(a_n)) = \ln \sqrt{a_n} = \frac{1}{2} \ln(a_n q^{n-1}) = \frac{1}{2} \ln a_n + \frac{1}{2} (n-1) \ln q$ 为等差数列,故④是“保比差数列函数”,A 错.故选 C.

二、填空题

13.6 14.50 15.200

16. $\frac{1}{4}$

提示:令 $m=1$,则 $a_{n+1} = a_1 a_n = \frac{1}{5} a_n$,

所以 $\{a_n\}$ 是公比与首项都为 $\frac{1}{5}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } S_n = \frac{\frac{1}{5} [1 - (\frac{1}{5})^n]}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - (\frac{1}{5})^n}{4}.$$

对任意正整数 n , $S_n < \frac{1}{4}$ 恒成立,

所以 $\frac{1}{4} \leq a$,即 a 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

三、解答题

17.解:(1)因为 $a_1, a_2, a_3 - \frac{1}{8}$ 成等差数列,

$$\text{所以 } 2a_2 = a_1 + a_3 - \frac{1}{8}.$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } 4q^2 - 8q + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } q = \frac{1}{2}, \text{ 或 } q = \frac{3}{2}.$$

因为 $q \in (0, 1)$,

$$\text{所以 } q = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

(2)根据题意,得 $b_n = na_n = \frac{n}{2^n}$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}, \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}, \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①} - \text{②}, \text{ 得 } \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} -$$

$$\frac{n}{2^{n+1}} = 1 - (n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \text{ 所以 } S_n = 2 - (n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

18.解:(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$.

由 $2a_1, \frac{1}{2}, 3a_2$ 成等差数列,

$$\text{可得 } 2a_1 + 3a_2 = 1,$$

$$\text{即 } 2a_1 + 3a_1 q = 1. \quad \text{①}$$

由 $a_2, \frac{1}{3}, a_6$ 成等比数列,

$$\text{可得 } a_2 a_6 = \left(\frac{1}{9}\right) a_3^2,$$

$$\text{即 } a_1 q \cdot a_1 q^5 = \frac{1}{9} a_1^2 q^4.$$

$$\text{由 ①②解得 } a_1 = q = \frac{1}{3}, \text{ 则 } a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$(2) b_n = \log_3 \frac{1}{a_n} = \log_3 3^n = n,$$

$$\frac{1}{b_{n-1} b_n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_{n-1} b_n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

19.(1)解:在数列 $\{a_n\}$ 中,

$$\text{因为 } a_1 = \frac{1}{4}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4},$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N}_+.$$

(2)证明: $b_n + 2 = 3 \log_{\frac{1}{4}} a_n (n \in \mathbb{N}_+)$,

$$\text{所以 } b_n = 3 \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 = 3n - 2.$$

$$\text{所以 } b_1 = 1, b_{n+1} - b_n = 3,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 1$, 公差 $d = 3$ 的等差数列.

$$(3) \text{解: 由 (1)(2) 知 } a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, b_n = 3n - 2,$$

$$\text{所以 } c_n = a_n + b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3n - 2,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= 1 + \frac{1}{4} + 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 7 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + (3n - 5) + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + (3n - 2) + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= [1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) + (3n - 2)] + \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \\ &= \frac{n(1 + 3n - 2)}{2} + \frac{\frac{1}{4} [1 - (\frac{1}{4})^n]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3n^2 - n}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

$$20. \text{解: (1) 由 } T_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 3^{\frac{n^2+n}{2}},$$

$$\text{则 } T_{n-1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} = 3^{\frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2}} (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = 3^n (n \geq 2).$$

又 $a_1 = T_1 = 3$, 满足上式.

所以 $a_n = 3^n (n \in \mathbb{N}_+)$.

(2) 因为 $b_1 + b_2 + b_3 = 15, b_1 + b_3 = 2b_2$,

所以 $b_2 = 5$.

$$\text{依题意 } \left(\frac{a_2}{3} + b_2\right)^2 = \left(\frac{a_1}{3} + b_1\right) \left(\frac{a_3}{3} + b_3\right),$$

$$\text{而 } \frac{a_1}{3} = 1, \frac{a_2}{3} = 3, \frac{a_3}{3} = 9,$$

$$\text{设 } b_1 = 5 - d, b_2 = 5, b_3 = 5 + d,$$

$$\text{所以 } 64 = (5 - d + 1)(5 + d + 9),$$

$$\text{所以 } d^2 + 8d - 20 = 0,$$

$$\text{得 } d = 2, \text{ 或 } d = -10 (\text{舍去}),$$

$$\text{所以 } b_n = b_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1.$$

$$\text{所以 } a_n b_n = (2n + 1) \cdot 3^n.$$

$$\text{所以 } S_n = 3 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} + (2n+1) \cdot 3^n,$$

$$3S_n = 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^n + (2n+1) \cdot 3^{n+1},$$

两式相减,得

$$-2S_n = 3 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \times 3^n - (2n+1) \cdot 3^{n+1},$$

$$-2S_n = 9 + 2 \cdot \frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n+1) \cdot 3^{n+1}$$

$$= -2n \cdot 3^{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = n \cdot 3^{n+1}.$$

21.解:(1)由 $a_{n+1} = \lambda a_n + \lambda^{n+1} + (2-\lambda)2^n (n \in \mathbb{N}_+)$,

$$\lambda > 0, \text{ 可得 } \frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n+1} = \frac{a_n}{\lambda^n} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n + 1,$$

所以 $\left\{\frac{a_n}{\lambda^n} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\right\}$ 为等差数列,

其首项为 0, 公差为 1, 故 $\frac{a_n}{\lambda^n} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n = n - 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (n-1)\lambda^n + 2^n (n \in \mathbb{N}_+)$.

(2) 设 $T_n = \lambda^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^4 + \cdots + (n-2)\lambda^{n-1} + (n-1)\lambda^n$.

$$\lambda T_n = \lambda^3 + 2\lambda^4 + 3\lambda^5 + \cdots + (n-2)\lambda^n + (n-1)\lambda^{n+1}, \quad \text{①}$$

当 $\lambda \neq 1$ 时, 由 ①-②, 得

$$(1-\lambda)T_n = \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^n - (n-1)\lambda^{n+1} = \frac{\lambda^2 - \lambda^{n+1}}{1-\lambda} -$$

$$(n-1)\lambda^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{\lambda^2 - \lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2} - \frac{(n-1)\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$$

$$= \frac{(n-1)\lambda^{n+2} - n\lambda^{n+1} + \lambda^2}{(1-\lambda)^2},$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n-1)\lambda^{n+2} - n\lambda^{n+1} + \lambda^2}{(1-\lambda)^2} + 2^{n+1} - 2.$$

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时}, T_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{此时数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{n(n-1)}{2} + 2^{n+1} - 2.$$

综上,

$$S_n = \begin{cases} \frac{(n-1)\lambda^{n+2} - n\lambda^{n+1} + \lambda^2}{(1-\lambda)^2} + 2^{n+1} - 2, & \lambda \neq 1, \\ \frac{n(n-1)}{2} + 2^{n+1} - 2, & \lambda = 1. \end{cases}$$

$$22. (1) \text{证明: 因为 } f(x) = \frac{1}{4^x + 2},$$

$$\text{所以 } f(x) + f(1-x) = \frac{1}{4^x + 2} + \frac{1}{4^{1-x} + 2} = \frac{1}{4^x + 2} +$$

$$\frac{4^x}{4 + 2 \cdot 4^x} = \frac{2 + 4^x}{2(2 + 4^x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{解: 由 (1) 知 } f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } f(0) + f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) = \cdots = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1),$$

$$\text{又 } a_n = f(1) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + \cdots + f(0),$$

$$\begin{aligned} \text{两式相加, 得 } 2a_n &= [f(0) + f(1)] + [f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right)] + [f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right)] + \cdots + [f(1) + f(0)] \\ &= \frac{1}{2} (n+1), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n+1}{4}, n \in \mathbb{N}_+.$$

$$(3) \text{解: 由 (2) 知 } a_n = \frac{n+1}{4}, n \in \mathbb{N}_+.$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N}_+.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是一个等差数列,

$$\text{所以 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{4}\right)}{2} = \frac{n(n+3)}{8},$$

$$\text{由 } S_n \geq \lambda a_n \Rightarrow \frac{n(n+3)}{8} \geq \lambda \cdot \frac{n+1}{4} \Rightarrow \lambda \leq$$

$$\frac{n(n+3)}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \left[(n+1) - \frac{2}{n+1} + 1 \right].$$

又因为 $g(n) = (n+1) - \frac{2}{n+1} + 1$ 在 $n \in \mathbb{N}_+$ 上为递增函数,

$$\text{所以当 } n=1 \text{ 时}, \left[(n+1) - \frac{2}{n+1} + 1 \right]_{\min} = 2,$$

所以 $\lambda \leq 1$, 所以实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

数学·高考版(文)第 19 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.D 3.A 4.B 5.B 6.C 7.A

8.D 9.B 10.B 11.C

12.A

提示:设点 O 到底面 PQR 的距离为 h ,即三棱锥 $O-PQR$ 的高为 h .设底面 PQR 的面积为 S ,则三棱锥 $O-PQR$ 的体积为 $V=f(x)=\frac{1}{3}Sh$.当点 P 从 S 到 A 的过程中,底面积 S 一直在增大,高 h 先减小再增大,当底面经过点 O 时,高为 0 ,所以体积 V 先增大,后减少,再增大,故选 A.

二、填空题

13. $\frac{3\sqrt{6}}{16}$ 14. $2\pi R^2$ 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

16. $\frac{1}{3}$

提示: $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}$,当 $\triangle ABC$ 的面积最大时,三棱锥 $P-ABC$ 的体积达到最大值.当 $CO\perp AB$ 时, $\triangle ABC$ 的面积最大,最大值为 $\frac{1}{2}\times$

$2\times 1=1$,此时 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$.

三、解答题

17.解:从图中可以看出,上、下两个面的表面积是相同的,同样,前与后,左与右两个面的表面积也是分别相同的.因为小正方体的棱长是 1cm ,所以上面的表面积为 $1^2\times 9=9(\text{cm}^2)$,前面的表面积为 $1^2\times 8=8(\text{cm}^2)$,左面的表面积为 $1^2\times 7=7(\text{cm}^2)$.所以几何体的表面积为 $(9+8+7)\times 2=48(\text{cm}^2)$.

18.解:(1)由三视图可知,该几何体是个组合体,其上部是个三棱锥,其三条侧棱两两垂直;下部分为一个半球,并且三棱锥的底面与半球的底面相切.

(2)由图可知, $V_{\text{三棱锥}}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 1\times 1)\times 1=\frac{1}{6}$;

球半径 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $V_{\text{半球}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

所以此几何体的体积 $V=\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}(\text{cm}^3)$.

(3)这 100 件铁件的质量 $m=100\times\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}\times 7.8\approx 130\times(1+1.4\times 3.1)=694.2(\text{g})$.

19.(1)证明:由已知条件得 $AM=\frac{2}{3}AD=2$.

如图所示,取 BP 的中点 T ,连接 AT , TN .

因为 N 为 PC 的中点,所以 $TN\parallel BC$,

$TN=\frac{1}{2}BC=2$,所以 $TN=AM$.

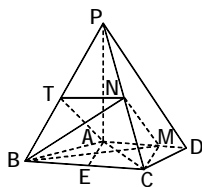
又 $AD\parallel BC$,所以 $TN\parallel AM$,且 $TN=AM$,

故四边形 $AMNT$ 为平行四边形,

所以 $MN\parallel AT$.

因为 $AT\subset$ 平面 PAB , $MN\not\subset$ 平面 PAB ,

所以 $MN\parallel$ 平面 PAB .



(第 19 题图)

(2)解:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, N 为 PC 的中点,

所以 N 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{2}PA$.

取 BC 的中点 E ,连接 AE .因为 $AB=AC=3$,

所以 $AE\perp BC$. $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5}$.

因为 $AM\parallel BC$,

所以点 M 到 BC 的距离为 $\sqrt{5}$,

故 $S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

所以四面体 $N-BCM$ 的体积

$V_{N-BCM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}PA\cdot S_{\triangle BCM}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

20.(1)证明:因为 $QD\perp$ 平面 $ABCD$, $PA\parallel QD$,

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$.

又 $AB\perp BC$,且 $AB\cap PA=A$,

所以 $BC\perp$ 平面 PAB .

因为 $BC\subset$ 平面 QBC ,

所以平面 $PAB\perp$ 平面 QBC .

(2)解:如下图,连接 BD ,过点 B 作 $BO\perp$

AD 于 O ,则 $BO=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{3}$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $BO\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp BO$.

又 $AD\perp OB$, $PA\cap AD=A$,

所以 $BO\perp$ 平面 $PADO$.

因为 $S_{\triangle PADO}=\frac{1}{2}(PA+QD)\cdot AD=3$,

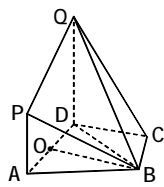
所以 $V_{B-PADO}=\frac{1}{3}S_{\triangle PADO}BO=\sqrt{3}$.

因为 $QD\perp$ 平面 $ABCD$, $S_{\triangle BDC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $V_{Q-BDC}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}QD=\frac{2\sqrt{3}}{9}$,

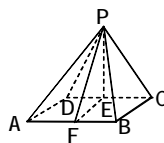
所以该多面体的体积为

$V_{B-PADO}+V_{Q-BDC}=\frac{11\sqrt{3}}{9}$.



(第 20 题图)

21.(1)证明:依题意,可知点 P 在平面 $ABCD$ 上的射影是线段 CD 的中点,设 CD 中点为 E ,连接 PE ,则 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.



(第 21 题图)

因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AD\perp PE$.

因为 $AD\perp CD$, $CD\cap PE=E$, $CD\subset$ 平面 PCD , $PE\subset$ 平面 PCD ,

所以 $AD\perp$ 平面 PCD .

因为 $PC\subset$ 平面 PCD ,所以 $AD\perp PC$.

(2)解:依题意,在等腰三角形 PCD 中,

$PC=PD=3$, $DE=EC=2$,

在 $\text{Rt}\triangle PED$ 中, $PE=\sqrt{PD^2-DE^2}=\sqrt{5}$.

如图,过点 E 作 $EF\perp AB$,垂足为 F ,连接 PF ,

因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AB\perp PE$.

又 $PE\cap EF=E$,所以 $AB\perp$ 平面 PEF .

因为 $PF\subset$ 平面 PEF ,所以 $AB\perp PF$.

依题意,得 $EF=AD=2$.

在 $\text{Rt}\triangle PEF$ 中, $PF=\sqrt{PE^2+EF^2}=3$,

所以 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PF=6$.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面 PAB 的面积为 6.

22.解:(1)因为 $EF\perp AB$,所以 $EF\perp PE$.

又因为 $PE\perp AE$, $EF\cap AE=E$,且 PE 在平面 $ACFE$ 外,所以 $PE\perp$ 平面 $ACFE$.

因为 $EF\perp AB$, $CD\perp AB$,所以 $EF\parallel CD$.

所以 $\frac{EF}{CD}=\frac{x}{BD}\Rightarrow EF=\frac{CD}{BD}x=\frac{x}{\sqrt{6}}$.

所以四边形 $ACFE$ 的面积

$S_{\text{四边形 } ACFE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{6}\times 3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}x^2=9\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$.

所以四棱锥 $P-ACFE$ 的体积

$V_{P-ACFE}=\frac{1}{3}S_{\text{四边形 } ACFE}\cdot PE=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3$,

即 $V(x)=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3(0<x<3\sqrt{6})$.

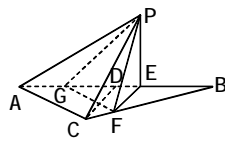
(2)由(1)知 $V'(x)=3\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$.

令 $V'(x)=0$,解得 $x=6$.

所以当 $0<x<6$ 时, $V'(x)>0$,

当 $6<x<3\sqrt{6}$ 时, $V'(x)<0$.

所以当 $BE=x=6$ 时, $V(x)$ 有最大值,最大值为 $V(6)=12\sqrt{6}$.



(第 22 题图)

(3)过点 F 作 $FG\parallel AC$ 交 AE 于点 G ,连接 PG ,则 $\angle PFG$ 或其补角为异面直线 AC 与 PF 所成的角,因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,所以 $\triangle GBF$ 也是等腰三角形.于是 $FG=BF=PF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{42}$,从而 $PG=\sqrt{PE^2+GE^2}=\sqrt{BE^2+BE^2}=6\sqrt{2}$.

在 $\triangle PFG$ 中,根据余弦定理,得

$\cos\angle PFG=\frac{PF^2+FG^2-PG^2}{2PF\cdot FG}=\frac{1}{7}$.

故异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

数学·高考版(文)第 20 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.A 3.D 4.C 5.D 6.C
7.A 8.D 9.C 10.D 11.B

12.A

提示:连接 BD , 交 AC 于点 O , 连接 SO . 在正四棱锥 $S-ABCD$ 中, 点 S 在底面 $ABCD$ 内的射影为点 O , 可得 $SO \perp$ 平面 $ABCD$, 从而易证 $AC \perp$ 平面 SBD . 分别取 CD, CS 的中点 F, G , 连接 EF, FG, EG , 则可证平面 $EFG \parallel$ 平面 SBD . 所以 $AC \perp$ 平面 EFG . 所以 $AC \perp FG$. 因此, 点 P 在 FG 上移动时总有 $AC \perp EP$. 故选 A.

二、填空题

13. 平行 14. $BM \perp PC$ 15. $2\sqrt{3}$

16. ②

提示: ①连接 A_1D, B_1C , 点 P 到平面 QEF 的距离即为点 P 到平面 A_1B_1CD 的距离, 只需过点 P 作 A_1D 的垂线, 垂足为 G , 因为 $A_1B_1 \perp PG$, 又 $A_1D \perp PG$, 故 $PG \perp$ 平面 A_1B_1CD , 即 PG 即为所求距离, 易知 $PG = \frac{\sqrt{2}}{4}a$; ③设 EF 的长为 b , 三棱锥 $P-QEF$

的底面面积 $S_{\triangle QEF} = \frac{1}{2} \times b \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}ab$,

高为定值 $PG = \frac{\sqrt{2}}{4}a$, 故其体积 $V = \frac{1}{3} \times$

$\frac{\sqrt{2}}{4}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}ab = \frac{a^2b}{12}$, 故为定值; ④连接

PD , 易证得 $A_1D \perp EF, PD \perp EF$, 故 $\angle PDA_1$ 即为二面角 $P-EF-Q$ 的平面角, 故为定值. 填②.

三、解答题

17. (1) 证明: 连接 AC_1 , 交 A_1C 于点 F , 连接 DF . 由矩形 ACC_1A_1 , 可得点 F 是 AC_1 的中点, 又 D 是 AB 的中点, 所以 $DF \parallel BC_1$. 因为 $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD , $DF \subset$ 平面 A_1CD , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

(2) 解: 由 (1) 知 $DF \parallel BC_1$, 所以 $\angle A_1DF$ 或其补角为异面直线 BC_1 和 A_1D 所成的角. 设 $AB=2$, 则 $DF = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 1$, $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = \sqrt{3}$, $A_1F = \frac{1}{2}A_1C = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + AC^2} = 1$. 在等腰 $\triangle A_1DF$ 中, 过点 F 作 $FG \perp A_1D$ 于 G , 则在 $Rt\triangle FGD$ 中, 可得 $FG = \frac{1}{2}DF$, 所以 $\angle A_1DF = 30^\circ$. 故异面直线 BC_1 和 A_1D 所成角的大小为 30° .

18. (1) 证明: 因为 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = CD = \frac{1}{2}AB$, 设 $BC=1$, 则 $AD=BD=\sqrt{2}$, 所以 $AD^2 + BD^2 = AB^2$, 所以 $AD \perp BD$. 又 $PB \perp$ 平面 $ABCD$. 所以 $PB \perp AD$. 又 $BD \cap PB = B$, $BD \subset$ 平面 PBD , $PB \subset$ 平面 PBD , 所以 $AD \perp$ 平面 PBD , 又 $AD \subset$ 平面 PAD , 所以平面 $PAD \perp$ 平面 PBD .

(2) 解: 当 $PQ=2QC$ 时, $PA \parallel$ 平面 QBD ,

证明如下:

连接 AC 交 BD 于点 M , 因为 $2CD=AB, CD \parallel AB$, 所以 $AM=2MC$, 过 PA 的平面 $PAC \cap$ 平面 $QBD = MQ$,

在 $\triangle APC$ 中, $\frac{CQ}{PQ} = \frac{CM}{AM} = \frac{1}{2}$,

所以 $PA \parallel MQ$.

又 $MQ \subset$ 平面 $QBD, PA \not\subset$ 平面 QBD , 所以 $PA \parallel$ 平面 QBD .

19. (1) 证明: 因为在 $\triangle PBD$ 中, O, M 分别是 BD, PD 的中点,

所以 $OM \parallel PB$.

又 $OM \not\subset$ 平面 $PAB, PB \subset$ 平面 PAB ,

所以 $OM \parallel$ 平面 PAB .

(2) 证明: 因为底面 $ABCD$ 是菱形,

所以 $BD \perp AC$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BD$. 又 $AC \cap PA = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC .

又 $BD \subset$ 平面 PBD ,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC .

(3) 解: 因为底面 $ABCD$ 是菱形, 且 $AB=2, \angle BAD=60^\circ$,

所以 $S_{\triangle BCD} = \sqrt{3}$.

又 $V_{C-PBD} = V_{P-BCD}$, 三棱锥 $P-BCD$ 的高为 PA ,

所以 $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \cdot PA = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $PA = \frac{3}{2}$.

20. (1) 证明: 因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, M 是 AB 的中点, 所以 $CM \perp AB$.

因为 $EA \perp$ 平面 $ABC, CM \subset$ 平面 ABC ,

所以 $CM \perp EA$.

因为 $AB \cap EA = A$,

所以 $CM \perp$ 平面 $EABD$.

因为 $EM \subset$ 平面 $EABD$,

所以 $CM \perp EM$.

(2) 解: 如图, 连接 MD . 因为在直角梯形 $EABD$ 中, $AM=BM=\sqrt{2}, AE=1, BD=2$,

所以 $DE=3, EM=\sqrt{3}, DM=\sqrt{6}$,

所以在 $\triangle EMD$ 中, $DE^2 = EM^2 + DM^2$,

所以 $DM \perp EM$.

因为 $CM \perp$ 平面 $EABD, DM \subset$ 平面 $EABD$,

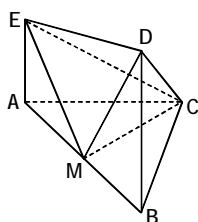
所以 $CM \perp DM$, 又 $EM \cap CM = M$, 所以

$DM \perp$ 平面 EMC , 故 $\angle DEM$ 就是直线 DE 与平面 EMC 所成的角.

在 $Rt\triangle EMD$ 中, $DM=\sqrt{6}, EM=\sqrt{3}$,

所以 $\tan \angle DEM = \frac{DM}{EM} = \sqrt{2}$.

所以 DE 与平面 EMC 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$.



(第 20 题图)

21. (1) 证明: 在底面 $ABCD$ 中, 由题意可知 $\triangle DOC \sim \triangle BOA$, 且相似比为 $1:2$,

所以 $DO:OB=1:2$.

又因为 $DE:EA_1=1:2$, 所以 $EO \parallel A_1B$.

又因为 $EO \not\subset$ 平面 $A_1ABB_1, A_1B \subset$ 平面 A_1ABB_1 ,

所以 $EO \parallel$ 平面 A_1ABB_1 .

(2) 解: 连接 A_1O . 在底面 $ABCD$ 中,

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 2\sqrt{3}$,

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{6}$,

$OA = \frac{2}{3}AC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$OB = \frac{2}{3}BD = \frac{4\sqrt{6}}{3}$,

所以 $OA^2 + OB^2 = AB^2$, 所以 $AC \perp BD$.

又因为 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $AA_1 \perp BD$.

因为 $AA_1 \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1 .

所以 $\angle BA_1O$ 为直线 A_1B 与平面 A_1ACC_1 所成角.

在 $Rt\triangle BA_1O$ 中, $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = 2\sqrt{5}$, $\sin \angle BA_1O = \frac{OB}{A_1B} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$.

所以直线 A_1B 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

22. (1) 证明: 因为侧棱 $CC_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1, B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

所以 $CC_1 \perp B_1C_1$. 连接 B_1E , 经计算

可得 $B_1E = \sqrt{5}, B_1C_1 = \sqrt{2}, EC_1 = \sqrt{3}$,

从而 $B_1E^2 = B_1C_1^2 + EC_1^2$,

所以在 $\triangle B_1EC_1$ 中, $B_1C_1 \perp C_1E$,

又 $CC_1, C_1E \subset$ 平面 $CC_1E, CC_1 \cap C_1E = C_1$,

所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 CC_1E ,

又 $CE \subset$ 平面 CC_1E , 故 $B_1C_1 \perp CE$.

(2) 解: 连接 D_1E , 过点 M 作 $MH \perp ED_1$ 于点 H , 可得 $MH \perp$ 平面 ADD_1A_1 , 连接 A_1H ,

则 $\angle MAH$ 为直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成的角.

设 $AM=x$, 从而在 $Rt\triangle AHM$ 中,

有 $MH = \frac{\sqrt{2}}{6}x, AH = \frac{\sqrt{34}}{6}x$.

在 $Rt\triangle C_1D_1E$ 中, 有 $C_1D_1=1, ED_1=\sqrt{2}$, 得 $EH = \sqrt{2}MH = \frac{1}{3}x$.

在 $\triangle AEH$ 中, $\angle AEH = 135^\circ, AE=1$,

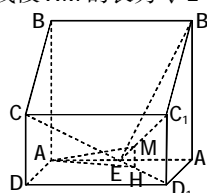
由 $AH^2 = AE^2 + EH^2 - 2AE \cdot EH \cos 135^\circ$,

得 $\frac{17}{18}x^2 = 1 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x$,

整理, 得 $5x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$,

解得 $x = \sqrt{2}$, 或 $x = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (舍去),

所以线段 AM 的长为 $\sqrt{2}$.



(第 22 题图)