

# 数学·高考版(文)

## 第9期

### 第2~3版同步周测题参考答案

#### 一、选择题

1.A 2.A 3.A 4.A 5.B 6.A

7.A 8.B 9.C 10.B 11.B

12.B

提示:设AB中点为D,则OD⊥AB,

因为 $|\vec{OA}+\vec{OB}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |\vec{AB}|$ ,

所以 $|2\vec{OD}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |\vec{AB}|$ ,

所以 $|\vec{AB}| \leq 2\sqrt{3} |\vec{OD}|$ .

因为 $|\vec{OD}|^2 + \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2 = 4$ ,

所以 $|\vec{OD}|^2 \geq 1$ .

因为直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于不同的两点A、B,

所以 $|\vec{OD}|^2 < 4$ ,所以 $4 > |\vec{OD}|^2 \geq 1$ ,

所以 $4 > \left(\frac{|-k|}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 1$ ,

因为 $k>0$ ,所以 $\sqrt{2} \leq k < 2\sqrt{2}$ .

#### 二、填空题

13. $x+y-1=0$ 或 $2x+y=0$

14. $(-13, 13)$

15. $xy = \frac{35}{6}$

16. $\frac{\pi}{3}$

提示:设圆 $C_1$ 的半径为 $r_1$ ,圆 $C_2$ 的半径为 $r_2$ ,点P到圆心 $C_1$ 的距离为 $d$ .圆 $C_2$ 的圆心坐标为 $(3+\cos\theta, \sin\theta)$ ,圆 $C_1$ 的圆心坐标为 $(3, 0)$ ,当 $\angle MPN$ 取最大值时,点P到圆心 $C_1$ 的距离最小,此时 $d = \sqrt{(3+\cos\theta-3)^2 + \sin^2\theta} - r_2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ ,

又 $r_1 = \frac{2}{5}$ ,所以 $\angle MPN = \frac{\pi}{3}$ .

#### 三、解答题

17.解:设所求直线与 $l_1$ 的交点为 $(x_1, y_1)$ ,则与 $l_2$ 的交点为 $(-x_1, 2-y_1)$ .

将其分别代入 $l_1, l_2$ 中,得

$$\begin{cases} x_1 - 3y_1 + 10 = 0, \\ -2x_1 + 2 - y_1 - 8 = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = 2. \end{cases}$$

所以所求直线的方程为 $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-0}{-4-0}$ ,

即 $x+4y-4=0$ .

18.解:(1)设AB的中点为M,切点为N,连接OM, MN,则 $|\vec{OM}| + |\vec{MN}| = |\vec{ON}| = 2$ ,取A关于y轴的对称点A',连接A'B,  $|\vec{A'B}| + |\vec{AB}| = 2(|\vec{OM}| + |\vec{MN}|) = 4$ .所以点B的轨迹是以A', A为焦点,长轴长为4的椭圆.其中 $a=2, c=\sqrt{3}$ ,  $b=1$ ,则曲线 $\Gamma$ 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2)因为B为CD的中点,所以OB⊥CD,则 $\vec{OB} \perp \vec{AB}$ .设 $B(x_0, y_0)$ ,则 $\vec{OB} = (x_0, y_0)$ ,  $\vec{AB} = (x_0 - \sqrt{3}, y_0)$ ,所以 $\vec{OB} \cdot \vec{AB} = x_0(x_0 - \sqrt{3}) + y_0^2 = 0$ .又 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ ,解得 $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .则 $k_{OB} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $k_{AB} = \mp \sqrt{2}$ ,则直线AB的方程为 $y = \pm \sqrt{2}(x - \sqrt{3})$ ,即 $\sqrt{2}x - y - \sqrt{6} = 0$ 或 $\sqrt{2}x + y - \sqrt{6} = 0$ .

19.解:(1)依题意知直线l的斜率存在.

因为直线l过点M(-2, 0),

所以可设直线l的方程为 $y = k(x+2)$ .

因为P, Q两点在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上,

所以 $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = 1$ .

因为 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = -\frac{1}{2}$ ,

即 $|\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}| \cdot \cos \angle POQ = -\frac{1}{2}$ ,

所以 $\angle POQ = 120^\circ$ ,

所以点O到直线l的距离等于 $\frac{1}{2}$ ,

所以 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{2}$ ,解得 $k = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

所以直线l的方程为 $x - \sqrt{15}y + 2 = 0$ 或 $x + \sqrt{15}y + 2 = 0$ .

(2)因为 $\triangle OMP$ 与 $\triangle OPQ$ 的面积相等,

所以MP=PQ,即P为MQ的中点,

所以 $\vec{MQ} = 2\vec{MP}$ .

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

所以 $\vec{MQ} = (x_2+2, y_2), \vec{MP} = (x_1+2, y_1)$ .

所以 $\begin{cases} x_2+2=2(x_1+2), \\ y_2=2y_1, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_2=2x_1+2, \\ y_2=2y_1, \end{cases}$  ①

因为P, Q两点在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上,

所以 $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1, \\ x_2^2 + y_2^2 = 1, \end{cases}$  ②

由①和②,得 $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1, \\ 4(x_1+1)^2 + 4y_1^2 = 1, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8}, \\ y_1 = \pm \frac{\sqrt{15}}{8}. \end{cases}$$

故直线l的斜率 $k = k_{MP} = \pm \frac{\sqrt{15}}{9}$ .

20.解:(1)由于圆M与 $\angle BOA$ 的两边相切,故M到OA, OB的距离相等,则M在 $\angle BOA$ 的角平分线上,同理, N也在 $\angle BOA$ 的角平分线上,即O, M, N三点共线,且直线ON为 $\angle BOA$ 的角平分线,因为 $M(\sqrt{3}, 1)$ ,所以M到x轴的距离为1,即圆M的半径为1,所以圆M的方程为 $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

设圆N的半径为r,连接AM, CN,则 $Rt\triangle OAM \sim Rt\triangle OCN$ ,得 $\frac{OM}{ON} = \frac{MA}{NC}$ ,即 $\frac{2}{3+r} = \frac{1}{r}$ ,解得 $r = 3$ ,  $OC = 3\sqrt{3}$ ,所以圆N的方程为 $(x - 3\sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 9$ .

(2)由对称性可知,所求弦长转化为过点A的MN的平行线被圆N截得的弦长,  $k_{MN} = \frac{3-1}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $A(\sqrt{3}, 0)$ ,所以此弦

所在直线的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3})$ ,即

$x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$ ,圆心N到该直线的距离 $d = \frac{|3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,故直线l被圆

N截得的弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{33}$ .

21.解:(1)设 $P(x, y)$ ,则 $k_{MP} \cdot k_{NP} = \frac{y}{x + \sqrt{2}}$ .

$\frac{y}{x + \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(x \neq \pm \sqrt{2})$ ,

整理,得 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1(x \neq \pm \sqrt{2})$ .

(2)因为圆O与直线l相切,

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ,即 $m^2 = k^2 + 1$ .

当直线l过M或N点时,

有 $\pm \sqrt{2}k + m = 0$ ,

由 $\begin{cases} \pm \sqrt{2}k + m = 0, \\ m^2 = k^2 + 1, \end{cases}$ 解得 $k^2 = 1$ ,

因为直线l与点P的轨迹交于不同的两点A, B,且M, N不在点P的轨迹上,所以 $k^2 \neq 1$ . ①

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 消去y,

得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$ ,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m^2-2}{1+2k^2}$ ,

$|\vec{AB}| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2m^2-2}{1+2k^2}}$ ,

将 $m^2 = k^2 + 1$ 代入上式,得

$|\vec{AB}| = 2\sqrt{\frac{2(k^4+k^2)}{4(k^4+k^2)+1}}$ .

又 $|\vec{AB}| \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4}{3}\right)$ ,

得 $\begin{cases} \frac{8(k^4+k^2)}{4(k^4+k^2)+1} < \frac{16}{9}, \\ \frac{8(k^4+k^2)}{4(k^4+k^2)+1} \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (k^2+2)(k^2-1) < 0, \\ (2k^2-1)(2k^2+3) \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq k^2 < 1$ . ②

由①和②,得 $\frac{1}{2} \leq k^2 < 1$ .

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1+m) \cdot (kx_2+m) = (1+k^2)x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2 = (1+k^2) \cdot \frac{2m^2-2}{1+2k^2} + km \cdot$

$\frac{-4km}{1+2k^2} + m^2$ ,

将 $m^2 = k^2 + 1$ 代入,得

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1+k^2}{1+2k^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1+2k^2}\right)$ ,

因为 $\frac{1}{2} \leq k^2 < 1$ ,

所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$ .

22.解:(1)由题意,设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ ,由已知可得 $2a = 4, a = 2c$ ,解得 $a = 2, c = 1$ ,所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ .

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .所以圆的圆心为 $(1, 0)$ ,半径为 $\frac{1}{2}a = 1$ ,所以圆的标准

方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ .  
(2)设 $P(x, y)$ ,则 $M(4, y), F(1, 0)$ ,其中 $-2 \leq x \leq 2$ ,因为P(x, y)在椭圆上,

所以 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ,所以 $y^2 = 3 - \frac{3}{4}x^2$ .  
所以 $|\vec{PF}|^2 = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + 3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}(x-4)^2$ ,  $|\vec{PM}|^2 = |x-4|^2$ ,  $|\vec{FM}|^2 = 3^2 + y^2 = 12 - \frac{3}{4}x^2$ .

①若 $|\vec{PF}| = |\vec{FM}|$ ,则 $\frac{1}{4}(x-4)^2 = 12 - \frac{3}{4}x^2$ ,解得 $x = -2$ ,或 $x = 4$ (舍去),当 $x = -2$ 时,  $P(-2, 0)$ ,此时P, F, M三点共线,不合题意,所以 $|\vec{PF}| \neq |\vec{FM}|$ ;

②若 $|\vec{PM}| = |\vec{PF}|$ ,则 $(x-4)^2 = \frac{1}{4}(x-4)^2$ ,解得 $x = 4$ ,不合题意;

③若 $|\vec{PM}| = |\vec{FM}|$ ,则 $(x-4)^2 = 12 - \frac{3}{4}x^2$ ,解得 $x = 4$ (舍去),或 $x = \frac{4}{7}$ ,

当 $x = \frac{4}{7}$ 时,  $y = \pm \frac{3\sqrt{15}}{7}$ ,

所以 $P\left(\frac{4}{7}, \pm \frac{3\sqrt{15}}{7}\right)$ ,满足题意.

综上可得,存在点 $P\left(\frac{4}{7}, \pm \frac{3\sqrt{15}}{7}\right)$ 或

$\left(\frac{4}{7}, -\frac{3\sqrt{15}}{7}\right)$ ,使得 $\triangle FPM$ 为等腰三角形.

# 数学·高考版(文)

## 第10期

### 第2~3版同步周测题参考答案

#### 一、选择题

1.C 2.C 3.A 4.C 5.D 6.B  
7.D 8.B 9.D 10.D 11.B

12.A

提示:设椭圆左焦点为  $N$ , 则连接  $AN, BN$ , 因为  $AF \perp BF$ , 且  $A$  与  $B$  关于原点对称, 所以四边形  $AFBN$  为矩形.

根据椭圆的定义, 得  $|AF| + |AN| = 2a$ , 因为  $\angle ABF = \alpha$ , 所以  $\angle ANF = \alpha$ .

所以  $2a = 2c \cos \alpha + 2c \sin \alpha$ .

所以  $e = \frac{2c}{2a} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}$ .

又  $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ ,

所以  $\frac{5\pi}{12} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ ,

则  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})} \leq \sqrt{3} - 1$ ,

即椭圆离心率  $e$  的取值范围为  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3} - 1]$ .

故选 A.

#### 二、填空题

13.3 或 5 14.6 15.  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 (y \neq 0)$

16.  $\frac{23}{3}$

提示: 设  $M(x, y)$ . 因为  $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0$ , 所以  $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{KN}$ , 则由向量数量积的几何意义可知,  $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{NM} = |\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{NM}| \cdot \cos \angle NKM = \overrightarrow{KM}^2 = (x-2)^2 + y^2$ .

又因为点  $M$  在椭圆上, 则  $y^2 = 9 - \frac{x^2}{4}$ , 所以  $\overrightarrow{KM} \cdot$

$\overrightarrow{NM} = \frac{3}{4} (x - \frac{8}{3})^2 + \frac{23}{3}$ , 所以当  $x = \frac{8}{3}$  时,  $\overrightarrow{KM} \cdot$

$\overrightarrow{NM}$  取得最小值  $\frac{23}{3}$ .

#### 三、解答题

17. 解: (1)  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ . ①

矩形  $ABCD$  的面积为  $32\sqrt{3}$ ,

即  $2a \cdot 2b = 32\sqrt{3}$ . ②

由①②解得  $a=4, b=2\sqrt{3}$ ,

所以椭圆  $M$  的标准方程是  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

(2) 易知过点  $N$  的直线斜率不存在时, 不满足题意.

设直线的方程为  $y - 0 = k(x - 1)$ , 即  $y = kx - k$ .

由  $\begin{cases} y = kx - k \\ 3x^2 + 4y^2 = 48 \end{cases}$  消去  $y$ ,

得  $(3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 48 = 0$ .

设  $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$ ,

则  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 48}{3 + 4k^2}$ .

又  $\overrightarrow{NE} = (x_1 - 1, y_1)$ ,  $\overrightarrow{NF} = (x_2 - 1, y_2)$ ,

所以  $\overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{NF} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2$

$= (x_1 - 1)(x_2 - 1) + k(x_1 - 1) \cdot k(x_2 - 1)$

$= (1 + k^2)(x_1 - 1)(x_2 - 1)$

$= (1 + k^2)[x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = \frac{-45(1 + k^2)}{3 + 4k^2}$ ,

所以  $-\frac{27}{2} \leq \frac{-45(1 + k^2)}{3 + 4k^2} \leq -12$ ,

解得  $\frac{1}{2} \leq k^2 \leq 3$ .

所以该直线斜率  $k \in [-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup$

$[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}]$ .

18. (1) 解: 由题意知  $c=1, b=\sqrt{3}$ , 则  $a^2 = b^2 +$

$c^2 = 4$ , 所以椭圆  $M$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 椭圆  $M$

的离心率为  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ .

(2) 证明: 设  $A(x_0, y_0), P(x_1, y_1)$ ,

则  $B(-x_0, -y_0), C(\frac{y_0}{2}, \frac{y_0}{2})$ .

由点  $A, P$  在椭圆上,

所以  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ , ①

$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ . ②

点  $A$  不是椭圆  $M$  的顶点, ②-①, 得

$\frac{y_1^2 - y_0^2}{x_1^2 - x_0^2} = -\frac{3}{4}$ .

又  $k_{PB} = \frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0}, k_{BC} = \frac{\frac{3}{2}y_0}{\frac{3}{2}x_0} = \frac{y_0}{x_0}$ ,

且点  $B, C, P$  三点共线,

所以  $\frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0} = \frac{y_0}{x_0}$ , 即  $\frac{y_0}{x_0} = \frac{4(y_1 + y_0)}{3(x_1 + x_0)}$ .

所以  $k_{AB} \cdot k_{PA} = \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{4(y_1 + y_0)}{3(x_1 + x_0)} \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$

$\frac{4(y_1^2 - y_0^2)}{3(x_1^2 - x_0^2)} = \frac{4}{3} \times (-\frac{3}{4}) = -1$ ,

所以  $AB \perp AP$ .

19. 解: (1) 由题意知,  $\frac{|MF_2|}{2c} = \frac{3}{4}$ , 所以

$|MF_2| = \frac{3}{2}c$ . 因为  $|MF_1|^2 = |MF_2|^2 + |F_1F_2|^2 = \frac{9}{4}c^2 +$

$4c^2$ , 所以  $|MF_1| = \frac{5}{2}c$ . 由椭圆定义, 可得  $|MF_1| +$

$|MF_2| = \frac{5}{2}c + \frac{3}{2}c = 2a$ , 所以  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ , 所以椭圆

$C$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ .

(2) 由题意知, 原点  $O$  为  $F_1F_2$  的中点,  $MF_2 \parallel$

$y$  轴, 所以直线  $MF_1$  与  $y$  轴的交点  $D(0, 2)$  是线

段  $MF_1$  的中点, 又  $M(\frac{c}{2}, \frac{b^2}{a})$ , 所以  $\frac{b^2}{a} = 4$ , 即  $b^2 = 4a$ .

由  $|MN| = 5|F_1N|$ , 得  $|DF_1| = 2|F_1N|$ .

设  $N(x_1, y_1)$ , 由题意知,  $y_1 < 0$ ,

则  $\begin{cases} 2(-c - x_1) = c, \\ -2y_1 = 2, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}c, \\ y_1 = -1, \end{cases}$

代入  $C$  的方程, 得  $\frac{9c^2}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ,

将  $b^2 = 4a$  及  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  代入  $\frac{9c^2}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ,

得  $\frac{9(a^2 - 4a)}{4a^2} + \frac{1}{4a} = 1$ ,

解得  $a=7$ , 或  $a=0$  (舍去),

当  $a=7$  时,  $b^2=28$ , 所以  $b=2\sqrt{7}$ .

20. (1) 解: 因为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  满足  $a^2 =$

$b^2 + c^2, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2} \times b \times 2c = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ ,

解得  $a^2=5, b^2=\frac{5}{3}$ ,

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$ .

(2) ① 解: 将  $y = k(x+1)$  代入  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$  中,

得  $(1+3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 5 = 0, \Delta = 36k^4 - 4(3k^2+1) \cdot$

$(3k^2-5) = 48k^2 + 20 > 0, x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{3k^2+1}$ .

因为  $AB$  中点的横坐标为  $-\frac{1}{2}$ ,

所以  $-\frac{6k^2}{3k^2+1} = -1$ , 解得  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

② 证明: 由①知  $x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{3k^2+1}, x_1 x_2 = \frac{3k^2-5}{3k^2+1}$ ,

又  $M(-\frac{1}{3}, 0)$ ,

所以  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 + \frac{1}{3}, y_1) \cdot (x_2 + \frac{1}{3}, y_2)$

$= (x_1 + \frac{1}{3})(x_2 + \frac{1}{3}) + y_1 y_2$

$= (x_1 + \frac{1}{3})(x_2 + \frac{1}{3}) + k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

$= (1+k^2)x_1 x_2 + (\frac{1}{3} + k^2)(x_1 + x_2) + \frac{49}{9} + k^2$

$= (1+k^2) \cdot \frac{3k^2-5}{3k^2+1} + (\frac{1}{3} + k^2)(-\frac{6k^2}{3k^2+1}) + \frac{49}{9} + k^2$

$= \frac{-3k^4 - 16k^2 - 5}{3k^2+1} + \frac{49}{9} + k^2 = \frac{4}{9}$ .

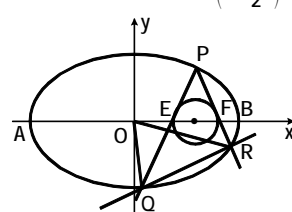
所以  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  为定值  $\frac{4}{9}$ .

21. 解: (1) 设点  $M(x, y)$ ,

因为  $k_{AM} \cdot k_{BM} = -\frac{3}{4}$ , 所以  $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{3}{4}$ ,

整理, 得点  $M$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$ .

(2) 如图, 由题意可得点  $P(1, \frac{3}{2})$ ,



(第21题图)

因为圆  $(x-1)^2 + y^2 = r^2$  的圆心为  $(1, 0)$ , 所以

直线  $PE$  与直线  $PF$  的斜率存在, 且互为相反数.

设直线  $PE$  的方程为  $y = k(x-1) + \frac{3}{2}$ , 与椭圆

方程联立消去  $y$ , 得  $(4k^2+3)x^2 + (12k-8k^2)x +$

$(4k^2-12k-3) = 0$ . 由于  $x=1$  是方程的一个解, 所以

方程的另一解为  $x_0 = \frac{4k^2-12k-3}{4k^2+3}$ .

同理,  $x_R = \frac{4k^2+12k-3}{4k^2+3}$ .

故直线  $RQ$  的斜率为  $k_{RQ} = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q}$

$= \frac{-k(x_R-1) + \frac{3}{2} - k(x_Q-1) + \frac{3}{2}}{\frac{x_R - x_Q}{4k^2+3}} = \frac{-k(8k^2-6-2)}{24k} = \frac{1}{2}$ .

把直线  $RQ$  的方程  $y = \frac{1}{2}x + b$  代入椭圆方

程, 消去  $y$  整理, 得  $x^2 + bx + b^2 - 3 = 0$ , 所以  $|RQ| =$

$\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} \cdot \sqrt{b^2 - 4(b^2 - 3)} = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{4 - b^2}$ ,

原点  $O$  到直线  $RQ$  的距离为  $d = \frac{|2b|}{\sqrt{5}}$ , 所以

$S_{\triangle ORO} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{4 - b^2} \cdot \frac{|2b|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$\sqrt{b^2(4 - b^2)} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{b^2 + (4 - b^2)}{2} = \sqrt{3}$ . 当且

仅当  $b^2=2, b=-\sqrt{2}$  时, 等号成立. 所以  $\triangle OOR$

的面积的最大值为  $\sqrt{3}$ .

22. (1) 解: 依题意  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 设  $C_1: \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} =$

$1, C_2: \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ , 由对称性, 四个焦点构成的

四边形为菱形, 且面积  $S = \frac{1}{2} \times 2b \times 2\sqrt{2}b = 2\sqrt{2}b^2$ ,

解得  $b^2=1$ , 所以椭圆  $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, C_2: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2) ① 证明: 设  $P(x_0, y_0)$ ,

则  $\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{4} = 1, A(-\sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, 0)$ ,

$k_{PA} = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{2}}, k_{PB} = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{2}}$ ,

所以  $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 2} = \frac{4 - 2x_0^2}{x_0^2 - 2} = -2$ ,

所以直线  $PA, PB$  斜率之积为常数  $-2$ .

② 解: 设  $E(x_1, y_1)$ , 则  $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1$ ,

$k_{EA} = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{2}}, k_{EB} = \frac{y_1}{x_1 - \sqrt{2}}$ ,

所以  $k_{EA} \cdot k_{EB} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - 2} = \frac{1 - \frac{1}{2}x_1^2}{x_1^2 - 2} = -\frac{1}{2}$ ,

同理,  $k_{FA} \cdot k_{FB} = -\frac{1}{2}$ .

所以  $k_{EA} \cdot k_{EB} \cdot k_{FA} \cdot k_{FB} = \frac{1}{4}$ ,

由  $k_{EA} = k_{PA}, k_{FB} = k_{PB}$ , 结合①得  $k_{FA} \cdot k_{EB} = -\frac{1}{8}$ .

所以直线  $AF$  与直线  $BE$  的斜率之积为常

数  $-\frac{1}{8}$ .

# 数学·高考版(文)

## 第 11 期

### 第 2~3 版同步周测题参考答案

#### 一、选择题

1.C 2.A 3.C 4.D 5.A 6.D

7.B 8.C 9.B 10.A 11.A

12.C

提示:记  $AF_1, AF_2$  与  $\triangle APF_1$  的内切圆相切于点  $N, M$ , 则  $|AN|=|AM|, |PM|=|PQ|, |NF_1|=|QF_1|, |AF_1|=|AF_2|$ .

所以  $|NF_1|=|AF_1|-|AN|=|AF_2|-|AM|=|MF_2|$ .

所以  $|QF_1|=|MF_2|$ .

所以  $|PF_1|-|PF_2|=(|QF_1|+|PQ|)-(|MF_2|-|PM|)=|QF_1|+|PQ|-|MF_2|+|PM|=|PQ|+|PM|=2|PQ|=4$ ,

即  $2a=4$ , 则  $a=2$ .

由  $|F_1F_2|=8=2c$ , 得  $c=4$ ,

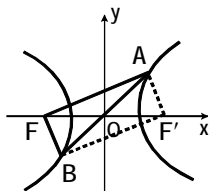
所以  $e=\frac{c}{a}=2$ . 故选 C.

#### 二、填空题

13.  $2\sqrt{2}$  14.  $3+2\sqrt{2}$  15. 2

16.  $\frac{x^2}{2}-y^2=1$

提示:如图所示,设双曲线的右焦点为  $F'(\sqrt{3}, 0)$ , 连接  $FA, FB$ , 由双曲线的对称性和  $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ , 知四边形  $AFBF'$  为矩形, 由  $|FA|+|FB|=4$ , 得  $|FA|+|AF'|=4$ , 又因为  $|FA|-|AF'|=2a$ , 所以  $|FA|=2+a, |F'A|=2-a$ , 由  $|F'A|^2+|FA|^2=(2-a)^2+(2+a)^2=(2\sqrt{3})^2$ , 得  $a^2=2, b^2=1$ , 所以双曲线 C 的方程为  $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ .



(第 16 题图)

#### 三、解答题

17. 解: 因为所求双曲线的一条渐近线方程为  $x-2y=0$ ,

即  $\frac{x}{2}-y=0$ ,

所以双曲线方程可设为  $\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda (\lambda \neq 0)$ .

因为双曲线过点  $P(4, 3)$ ,

所以  $\frac{4^2}{4}-3^2=\lambda$ , 即  $\lambda=-5$ .

所以所求双曲线方程为  $\frac{x^2}{4}-y^2=-5$ ,

所以该双曲线的标准方程为  $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$ .

18. 解: (1) 由已知  $2=\frac{3}{2}+\frac{p}{2}$ , 解得  $p=1$ .

(2) 由 (1), 知  $F(\frac{1}{2}, 0)$ , 显然直线 AB 的斜率  $k$  存在且  $k \neq 0$ ,

设直线  $AB: y=k(x-\frac{1}{2})$  联立  $y^2=2x$ , 得  $k^2x^2-(2+k^2)x+\frac{k^2}{4}=0 (k \neq 0)$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

则  $x_1+x_2=\frac{2+k^2}{k^2}, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ ,

则  $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}=x_1+x_2+1=\frac{2+k^2}{k^2}+1=2+\frac{2}{k^2}$ .

因为  $CD \perp AB$ , 所以  $|CD|=2+2k^2$ ,

所以  $|AB|+|CD|=4+\frac{2}{k^2}+2k^2 \geq 4+2 \times \sqrt{2 \times 2}=8$ ,

当且仅当  $\frac{2}{k^2}=2k^2$ , 即  $k=\pm 1$  时,  $|AB|+|CD|$  取得最小值 8.

19. 解: (1) 由题意, 点 C 到定点  $F(-\frac{1}{4}, 0)$  和直线  $x=\frac{1}{4}$  的距离相等, 故点 C 的轨迹 E 的方程为  $y^2=-x$ .

(2) 由方程组  $\begin{cases} y^2=-x, \\ y=k(x+1), \end{cases}$  消去  $x$ , 整理, 得  $ky^2+y-k=0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $y_1+y_2=-\frac{1}{k}$ ,

$y_1y_2=-1$ .

设直线  $l$  与  $x$  轴交于点 N,

则  $N(-1, 0)$ .

所以  $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAN}+S_{\triangle OBN}=\frac{1}{2}|ON| \cdot |y_1| + \frac{1}{2}|ON| \cdot |y_2| = \frac{1}{2}|ON| \cdot |y_1+y_2| = \frac{1}{2} \times 1 \times$

$\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{k})^2+4}$ .

因为  $S_{\triangle OAB}=\sqrt{10}$ ,

所以  $\frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{k})^2+4} = \sqrt{10}$ ,

解得  $k=\pm \frac{1}{6}$ .

20. 解: (1) 设  $\angle CAx=\alpha$ , 则由  $\tan \angle BAC = \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = -\frac{4}{3}$  及  $\alpha$  为锐角, 得  $\tan \alpha=2$ . 所以 AC 所在直线的方程为  $y=2x$ , AB 所在直线的方程为  $y=-2x$ .

(2) 设所求双曲线的方程为  $4x^2-y^2=\lambda (\lambda \neq 0)$ ,  $C(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 > 0, x_2 > 0)$ ,  $D(x_0, y_0)$ . 由  $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$ , 得  $(x_0-x_1, y_0-y_1)=2(x_2-x_0, y_2-y_0)$ , 所以  $x_0=\frac{x_1+2x_2}{3}, y_0=\frac{y_1+2y_2}{3}=\frac{2x_1-4x_2}{3}$ .

因为点 D 在双曲线上,

所以  $4(\frac{x_1+2x_2}{3})^2 - (\frac{2x_1-4x_2}{3})^2 = \lambda$ ,

所以  $\frac{32}{9}x_1x_2=\lambda$ . ①

由  $\tan \angle BAC = -\frac{4}{3}$ , 得  $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$ .

因为  $|AB|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{5}x_2$ ,

$|AC|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{5}x_1$ ,

所以  $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 5x_1x_2 \times \frac{4}{5} = 2x_1x_2=9$ ,

代入 ①, 得  $\lambda=16$ , 所以双曲线的方程为  $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ .

(3) 由题意知  $\langle \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF} \rangle = \pi - \angle BAC$ ,

所以  $\cos \langle \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF} \rangle = -\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ .

因为  $D(x_0, y_0)$  在双曲线上,

所以  $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{16}=1$ .

又因为点 D 到 AB, AC 所在直线的距离分别为  $|\overrightarrow{DF}|=\frac{|2x_0+y_0|}{\sqrt{5}}, |\overrightarrow{DE}|=\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$ ,

所以  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = |\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DF}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF} \rangle = \frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|2x_0+y_0|}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{5} = \frac{48}{25}$ .

21. (1) 解: 设直线 AM 的方程为  $x=my+p$ , 代入  $y^2=2px$ , 得  $y^2-2mpy-2p^2=0$ ,

设  $A(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$ ,

则  $y_1y_2=-2p^2=-8$ , 得  $p=2$ .

所以抛物线 C 的方程为  $y^2=4x$ .

(2) 证明: 设  $B(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$ .

由 (1) 可知,  $y_3y_4=-2p^2$ .

因为  $F(\frac{p}{2}, 0)$ , 所以设直线 AB 的方程为  $x=ty+\frac{p}{2}$ , 代入  $y^2=2px$ , 得  $y^2-2pty-p^2=0$ , 所以  $y_1y_3=-p^2$ .

又直线 AB 的斜率  $k_{AB}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{2p}{y_1+y_3}$ ,

直线 MN 的斜率  $k_{MN}=\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}=\frac{2p}{y_2+y_4}$ , 所以

$\frac{k_{AB}}{k_{MN}}=\frac{y_2+y_4}{y_1+y_3}=\frac{-2p^2+y_2y_4}{y_1+y_3}=\frac{-2p^2}{y_1+y_3} \cdot \frac{(y_1+y_3)}{y_1+y_3} = -2$ . 故直线 AB 与直线 MN 斜率之比为定值 2.

22. (1) 证明: 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 把  $y=kx+2$  代入  $y=2x^2$  中, 得  $2x^2-kx-2=0$ ,

所以  $x_1+x_2=\frac{k}{2}$ .

因为  $x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$ ,

所以点 N 的坐标为  $(\frac{k}{4}, \frac{k^2}{8})$ .

因为  $(2x^2)'=4x$ , 所以  $(2x^2)'|_{x=\frac{k}{4}}=k$ ,

即抛物线在点 N 处的切线的斜率为  $k$ .

因为直线  $l: y=kx+2$  的斜率为  $k$ ,

所以切线平行于 AB.

(2) 解: 假设存在实数  $k$ , 使以 AB 为直径的圆 M 经过点 N.

因为 M 是 AB 的中点,

所以  $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$ .

由 (1) 知  $y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\frac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}(\frac{k^2}{2}+4)=\frac{k^2}{4}+2$ .

2. 因为  $MN \perp x$  轴, 所以  $|MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$ .

因为  $|AB|=\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(\frac{k}{2})^2-4 \times (-1)}$

$=\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{k^2}{4}+4} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{k^2+16}$ ,

所以  $\frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{k^2+16}$ ,

所以  $k=\pm 2$ . 所以存在实数  $k=\pm 2$ , 使以 AB 为直径的圆 M 经过点 N.

# 数学·高考版(文)

## 第12期

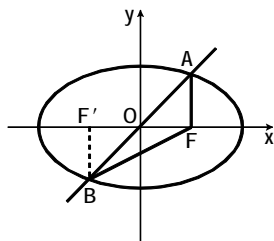
### 第2~3版同步周测题参考答案

#### 一、选择题

1.D 2.B 3.A 4.B 5.C 6.C  
7.C 8.D 9.A 10.B 11.C

#### 12.A

提示:如图,取椭圆左焦点为 $F'$ ,连接 $BF'$ ,由椭圆的对称性知 $|AF|=|BF'|$ ,由于 $|AF|+|BF|=4$ ,所以 $|BF'|+|BF|=2a=4$ ,即 $a=2$ .不妨设 $M(0, b)$ ,由题意得点 $M$ 到直线 $l$ 的距离 $\frac{|0-4b|}{5} \geq \frac{4}{5}$ ,可得 $b \geq 1$ ,则椭圆 $E$ 的离心率 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .又 $e \in (0, 1)$ ,所以 $e \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ,故选A.



(第12题图)

#### 二、填空题

13.8 14. $\pm 2\sqrt{2}$  15. $\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$

16. $x^2+y^2=4$

提示:由题意,延长 $F_1D, F_2A$ 并交于点 $B$ ,易证 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle AFD$ ,所以 $|FD|=|BD|$ , $|F_1A|=|AB|$ ,又 $O$ 为 $F_1F_2$ 的中点,连接 $DO$ ,所以 $OD \parallel F_2B$ ,从而可知 $|DO| = \frac{1}{2}|F_2B| = \frac{1}{2}(|AF_1| + |AF_2|) = 2$ .设点 $D$ 的坐标为 $(x, y)$ ,则 $x^2+y^2=4$ ,所以点 $D$ 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$ .

#### 三、解答题

17.解:由题意,可设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

由已知,得 $|F_1F_2|=2c=8$ .

$$\text{又 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_P| = 4|y_P| \leq 4b,$$

故 $4b=12$ ,所以 $b=3$ ,

从而 $a^2=b^2+c^2=25$ ,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

18.解:(1)设 $M(x, y)$ 到直线 $x=4$ 的距离为 $d$ ,根据题意 $d=2|MN|$ ,所以 $|x-4| = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ ,化简,得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ,所以动点 $M$ 的轨迹为椭圆,其方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2)由题意,易知直线 $m$ 的斜率存在,且不为0,设直线 $m$ 的方程为 $y=kx+3, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .因为 $A$ 是 $PB$ 的中点,

$$\text{所以 } x_1 = \frac{x_2}{2}, \quad \textcircled{1}$$

$$y_1 = \frac{3+y_2}{2}, \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \quad \textcircled{3}$$

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1, \quad \textcircled{4}$$

联立①②③④,解得 $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=0. \end{cases}$

即点 $B$ 的坐标为 $(2, 0)$ ,或 $(-2, 0)$ ,所以直线 $m$ 的斜率为 $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ .

19.(1)解:抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为

$(\frac{p}{2}, 0)$ .由点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 在直线 $l: x-y-2=0$ 上,得 $\frac{p}{2}-0-2=0$ ,即 $p=4$ ,所以抛物线 $C$ 的方程为 $y^2=8x$ .

(2)设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,线段 $PQ$ 的中点 $M(x_0, y_0)$ .因为点 $P$ 和 $Q$ 关于直线 $l$ 对称,所以直线 $l$ 垂直平分线段 $PQ$ ,于是直线 $PQ$ 的斜率为 $-1$ ,则可设其方程为 $y=-x+b$ .

①证明:由 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=-x+b, \end{cases}$ 消去 $x$ ,得 $y^2+2py-2pb=0$ .(\*)

因为 $P$ 和 $Q$ 是抛物线 $C$ 上的相异两点,所以 $y_1 \neq y_2$ ,从而 $\Delta=(2p)^2-4(-2pb)>0$ ,化简,得 $p+2b>0$ .又 $y_1+y_2=-2p$ ,所以 $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = -p$ .

因为 $M(x_0, y_0)$ 在直线 $l$ 上,所以 $x_0=2-p$ ,因此,线段 $PQ$ 的中点坐标为 $(2-p, -p)$ .

②解:因为 $M(2-p, -p)$ 在直线 $y=-x+b$ 上,所以 $-p=-(2-p)+b$ ,即 $b=2-2p$ .由①知 $p+2b>0$ ,于是 $p+2(2-2p)>0$ ,所以 $p<\frac{4}{3}$ .因此, $p$ 的取值范围为 $(0, \frac{4}{3})$ .

20.解:(1)由 $x^2+5y^2=5$ ,可得 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ .

所以 $c=2$ ,所以 $F(2, 0), A(0, 1)$ .

由椭圆的对称性,

可知满足 $|OB|=|OC|$ 的直线 $l$ 有两种:

①当直线 $l \perp x$ 轴时,令 $x=2$ ,得 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

所以 $B, C$ 两点的坐标分别为 $(2, \frac{\sqrt{5}}{5})$ 和

$(2, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ .

②当直线 $l$ 与 $x$ 轴重合时, $B, C$ 两点的坐标分别为 $(\sqrt{5}, 0)$ 和 $(-\sqrt{5}, 0)$ .

(2)①易知,当直线 $l$ 与 $x$ 轴重合时, $|AB|=|AC|$ ,此时直线 $l$ 的方程为 $y=0$ .

②当直线 $l$ 与 $x$ 轴垂直时,直线 $l$ 不符合题意.

③当直线 $l$ 与坐标轴不垂直时,设过点 $F$ 的直线的斜率为 $k$ ,直线 $l$ 与椭圆 $M$ 的交点 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ , $BC$ 的中点 $N(x_0, y_0)$ ,则 $l: y=k(x-2)$ .

$$\text{联立 } \begin{cases} y=k(x-2), \\ x^2+5y^2=5, \end{cases} \text{得}$$

$$(1+5k^2)x^2-20k^2x+20k^2-5=0,$$

$$\text{所以 } x_1+x_2 = \frac{20k^2}{1+5k^2}.$$

$$\text{所以 } x_0 = \frac{10k^2}{1+5k^2}, y_0 = \frac{-2k}{1+5k^2}.$$

要使 $|AB|=|AC|$ ,只要 $AN \perp BC$ ,

$$\text{所以 } \frac{y_0-1}{x_0} \cdot k = -1, \text{所以 } 5k^2-8k+1=0,$$

$$\text{所以 } k = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}.$$

所以直线 $l$ 的方程为 $y = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}(x-2)$ .

综上,符合题意的直线 $l$ 的方程为 $y=0$ 或 $y = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}(x-2)$ .

21.解:(1)由 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ ,且 $|PF_1|, |F_1F_2|, |PF_2|$ 成等差数列,得 $|PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2| = 4 > |F_1F_2|$ .根据椭圆定义,知 $P$ 的轨迹为以 $F_1, F_2$ 为焦点的椭圆,其长轴 $2a=4$ ,焦距 $2c=2$ ,短半轴 $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{3}$ ,故 $C_1$ 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2)过点 $A(-2, 0)$ 与 $x$ 轴垂直的直线不与圆 $C_2$ 相切,故可设 $l: y=k(x+2)$ ,由直线 $l$ 与曲线 $C_2$ 相切,得 $\frac{|k(t+2)|}{\sqrt{k^2+1}} = t(t+2)$ ,化简,得 $t = \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}, t \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ,由 $0 < \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,解得 $0 < k^2 \leq 1$ .联立 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 $y$ ,得

$$(4k^2+3)x^2+16k^2x+16k^2-12=0, \text{直线 } l \text{ 被曲线 } C_1 \text{ 截得的线段一端点为 } A(-2, 0), \text{ 设另一端点为 } B,$$

解方程可得 $B(\frac{-2(4k^2-3)}{4k^2+3}, \frac{12k}{4k^2+3})$ ,有

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{-2(4k^2-3)}{4k^2+3}\right)^2 + \left(\frac{12k}{4k^2+3}\right)^2} = \frac{12\sqrt{k^2+1}}{4k^2+3}.$$

$$\text{令 } \sqrt{k^2+1} = n, \text{ 则 } |AB| = \frac{12n}{4n^2-1} = \frac{12}{4n-\frac{1}{n}},$$

$n \in (1, \sqrt{2}]$ .考查函数 $y=4n-\frac{1}{n}$ 的性质,知 $y=4n-\frac{1}{n}$ 在区间 $(1, \sqrt{2}]$ 上是增函数,所以 $n=\sqrt{2}$ 时, $y=4n-\frac{1}{n}$ 取最大值 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ,从而 $|AB|_{\min} = \frac{12}{\frac{7\sqrt{2}}{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ .所以直线 $l$ 被曲线 $C_1$ 截得的

的线段长的最小值为 $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ .

22.(1)解:因为椭圆的焦点在 $y$ 轴上,故设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,由已知得 $b=1, c=1$ ,所以 $a=\sqrt{2}$ ,所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .当直线 $l$ 的斜率不存在时, $|CD|=2\sqrt{2}$ ,与题意不符;当直线 $l$ 的斜率存在时,设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+1, C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ .

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 化简得 $(k^2+2)x^2+2kx-1=0$ ,

$$\text{则 } x_1+x_2 = -\frac{2k}{k^2+2}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{k^2+2}.$$

所以 $|CD| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{2k}{k^2+2}\right)^2 + \frac{4}{k^2+2}} = \frac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{k^2+2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ,解得 $k=\pm\sqrt{2}$ .所以直线 $l$ 的方程为 $y=\sqrt{2}x+1$ 或 $y=-\sqrt{2}x+1$ .

(2)证明:当直线 $l$ 的斜率不存在时,与题意不符.当直线 $l$ 的斜率存在时,设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+1(k \neq 0, k \neq \pm 1), C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ,则点 $P$ 的坐标为 $(-\frac{1}{k}, 0)$ .

$$\text{由(1)知 } x_1+x_2 = -\frac{2k}{k^2+2}, x_1x_2 = -\frac{1}{k^2+2},$$

$$\text{且直线 } AC \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1+1}(x+1),$$

$$\text{直线 } BD \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2}{x_2-1}(x-1),$$

将两直线方程联立,消去 $y$ ,

$$\text{得 } \frac{x+1}{x-1} = \frac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}.$$

因为 $-1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1$ ,

$$\text{所以 } \frac{x+1}{x-1} \text{ 与 } \frac{y_2}{y_1} \text{ 异号,}$$

$$\text{且 } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{y_2^2(x_1+1)^2}{y_1^2(x_2-1)^2} = \frac{2-2x_2^2}{2-2x_1^2} \cdot \frac{(x_1+1)^2}{(x_2-1)^2} =$$

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{1-\frac{2k}{k^2+2} - \frac{1}{k^2+2}}{1+\frac{2k}{k^2+2} - \frac{1}{k^2+2}} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2.$$

$$\text{又 } y_1y_2 = k^2x_1x_2 + k(x_1+x_2) + 1 = k^2\left(-\frac{1}{k^2+2}\right) + k \cdot \left(-\frac{2k}{k^2+2}\right) + 1 = -\frac{2(1+k)^2(k-1)}{(k^2+2)(k+1)},$$

$$\text{所以 } \frac{k-1}{k+1} \text{ 与 } y_1y_2 \text{ 异号,}$$

$$\text{所以 } \frac{x+1}{x-1} \text{ 与 } \frac{k-1}{k+1} \text{ 同号,}$$

$$\text{所以 } \frac{x+1}{x-1} = \frac{k-1}{k+1}, \text{ 解得 } x=-k, \text{ 故点 } Q \text{ 坐标为 } (-k, y_0),$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(-\frac{1}{k}, 0\right) \cdot (-k, y_0) = 1,$$

$$\text{故 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \text{ 为定值.}$$