

数学·高考版(文)

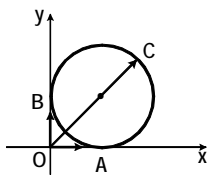
第 13 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1.C 2.D 3.A 4.D 5.C 6.B
7.C 8.C 9.D 10.D 11.B
12.A

提示:如图,建立平面直角坐标系xOy,由 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是单位向量,且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 可设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = (0, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (x, y)$, 代入 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$, 得 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 即点 C 运动轨迹是以 (1, 1) 为圆心, 1 为半径的圆. 又 $|\mathbf{c}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 故由几何性质, 得 $\sqrt{1^2 + 1^2} - 1 \leq |\mathbf{c}| \leq \sqrt{1^2 + 1^2} + 1$, 所以 $\sqrt{2} - 1 \leq |\mathbf{c}| \leq \sqrt{2} + 1$.



(第 12 题图)

二、填空题

- 13.-4 14.- $\frac{1}{2}$ 15. $\frac{9}{2}$

16. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

提示:由题意得 $A(2, 0), B(0, 1)$,

所以直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2} + y = 1$,

且 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = \lambda(2, 0) + \mu(0, 1) = (2\lambda, \mu)$,

又 P 是区域 Ω 内的任意一点(包括边界),

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{2\lambda}{2} + \mu \geq 1, \\ \frac{(2\lambda)^2}{4} + \mu^2 \leq 1, \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{化简,得} \begin{cases} \lambda + \mu \geq 1, \\ \lambda^2 + \mu^2 \leq 1, \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \end{cases}$$

所以点 M 所在的区域 Ω' 是由直线 $\lambda + \mu = 1$, 圆 $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ 在第一象限内所围成的弓形部分, 所以动点 $M(\lambda, \mu)$ 所构成的区域 Ω' 的面积是 $\frac{\pi}{4} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

三、解答题

17.解:(1)由题意,得

$$\overrightarrow{AB} = (\sin\theta - \cos\theta, -\sqrt{2}\sin\theta),$$

$$\text{当 } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } \sin\theta - \cos\theta = \sin\frac{2\pi}{3} -$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2}\sin\theta = -\sqrt{2} \cdot$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} \right).$$

(2)因为 $\overrightarrow{AB} = (\sin\theta - \cos\theta, -\sqrt{2}\sin\theta)$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AB}|^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (-\sqrt{2}\sin\theta)^2 = 1 - \sin 2\theta + 2\sin^2\theta = 1 - \sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta =$$

$$2 - \sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{因为 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{所以当 } 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4},$$

$$\text{即 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } |\overrightarrow{AB}|^2 \text{ 取到最大值,}$$

$$\text{此时 } |\overrightarrow{AB}|^2 = 2 - \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3,$$

$$\text{所以当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } |\overrightarrow{AB}| \text{ 取到最大值 } \sqrt{3}.$$

$$18.\text{解:(1)由已知条件易知 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB = 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot$$

$$\cos \angle AOC = 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \text{所以 } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) = 9, \text{所以 } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3.$$

$$(2)\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}, \text{可得 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = m|\overrightarrow{OA}|^2 + n\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB},$$

$$\text{且 } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + n|\overrightarrow{OB}|^2,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 4m - 3n = -4, \\ -3m + 3n = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } m = n = -4.$$

$$19.\text{解:由 } |\overrightarrow{MF_1}| = |\overrightarrow{MF_2}|,$$

$$\text{可得 } |\overrightarrow{OF_1} - \overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OF_2} - \overrightarrow{OM}|,$$

$$\text{即 } |(-e_1 + 0e_2) - (xe_1 + ye_2)| = |(e_1 + 0e_2) - (xe_1 + ye_2)|,$$

$$\text{即 } |(-1-x)e_1 - ye_2| = |(1-x)e_1 - ye_2|,$$

$$\text{即 } |(-1-x)e_1 - ye_2|^2 = |(1-x)e_1 - ye_2|^2,$$

$$\text{即 } (1+x)^2 + y^2 + 2(1+x)ye_1 \cdot e_2 = (1-x)^2 + y^2 -$$

$$2(1-x)ye_1 \cdot e_2,$$

$$\text{即 } (1+x)^2 + y^2 + 2(1+x)y\cos 45^\circ = (1-x)^2 + y^2 - 2(1-x)y\cos 45^\circ,$$

$$\text{化简,得 } \sqrt{2}x + y = 0.$$

$$20.\text{解:(1)因为 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (x+4, y-2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = (-x-4, 2-y).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA} \text{ 且 } \overrightarrow{BC} = (x, y),$$

$$\text{所以 } x(2-y) - y(-x-4) = 0,$$

$$\text{即 } x+2y=0. \quad ①$$

$$(2)\text{因为 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x+6, y+1),$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (x-2, y-3),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}, \text{所以 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0,$$

$$\text{即 } (x+6)(x-2) + (y+1)(y-3) = 0. \quad ②$$

$$\text{联立 } ①②, \text{化简得 } y^2 - 2y - 3 = 0.$$

$$\text{解得 } y=3, \text{ 或 } y=-1.$$

$$\text{故当 } y=3 \text{ 时, } x=-6,$$

$$\text{此时 } \overrightarrow{AC} = (0, 4), \overrightarrow{BD} = (-8, 0),$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形 } ABCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = 16;$$

$$\text{当 } y=-1 \text{ 时, } x=2,$$

$$\text{此时 } \overrightarrow{AC} = (8, 0), \overrightarrow{BD} = (0, -4),$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形 } ABCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = 16.$$

综上, $x=-6, y=3$, 或 $x=2, y=-1$; 四边形 ABCD 的面积都为 16.

$$21.\text{解:(1)因为 } x = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \mathbf{a} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \mathbf{b} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\text{所以 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{而 } |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{2}, |\mathbf{b}| = \sqrt{0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2)\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = (\sin x, \cos x) \cdot (\sin x, \sin x) =$$

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{2} +$$

$$\frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以 } 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\text{所以当 } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } x = \frac{3\pi}{8} \text{ 时, } (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})_{\max} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

$$(3)f(x) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\sqrt{3} \cos x,$$

$$\cos x - \sin x) \cdot (2 \sin x, \cos x + \sin x) = 2\sqrt{3} \cdot$$

$$\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x =$$

$$2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), g(x) = 2 \sin\left[2\left(x - s\right) + \frac{\pi}{6}\right] + t =$$

$$2 \sin\left(2x - 2s + \frac{\pi}{6}\right) + t = 2 \sin 2x + 1, \text{ 所以 } t = 1, s =$$

$$\frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ 所以 } |\mathbf{m}| = \sqrt{s^2 + t^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)^2 + 1}.$$

$$\text{所以 } k=0 \text{ 时,}$$

$$|\mathbf{m}|_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 144}}{12}.$$

22.解:(1)由题意可得,直线 AB 的方

程是 $y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)$ 与 $y^2 = 2px$ 联立,消

去 y, 得 $4x^2 - 5px + p^2 = 0$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{5p}{4}.$$

由抛物线定义,得 $|\mathbf{AB}| = x_1 + x_2 + p = 9$.

所以 $p=4$, 从而抛物线的方程是 $y^2 = 8x$.

(2)由(1)知 $x^2 - 5x + 4 = 0$,

从而 $x_1=1, x_2=4, y_1=-2\sqrt{2}, y_2=4\sqrt{2}$,

从而 $A(1, -2\sqrt{2}), B(4, 4\sqrt{2})$.

设 $\overrightarrow{OC} = (x_3, y_3)$, 由 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$,

$$\text{得 } \overrightarrow{OC} = (1, -2\sqrt{2}) + \lambda(4, 4\sqrt{2}) =$$

$$(4\lambda + 1, 4\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2}),$$

$$\text{又 } y_3^2 = 8x_3,$$

$$\text{即 } [2\sqrt{2}(2\lambda - 1)]^2 = 8(4\lambda + 1),$$

$$\text{即 } (2\lambda - 1)^2 = 4\lambda + 1, \text{ 解得 } \lambda = 0, \text{ 或 } \lambda = 2.$$

数学·高考版(文)

第 14 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.A 4.B 5.D 6.A

7.D 8.C 9.B 10.B 11.A

12.D

提示: $\tan \frac{\beta}{2} = \tan \left[\left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right) - \left(\alpha - \frac{\beta}{4} \right) \right] =$

$$\frac{\tan \left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right) - \tan \left(\alpha - \frac{\beta}{4} \right)}{1 + \tan \left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right) \tan \left(\alpha - \frac{\beta}{4} \right)} = \frac{1}{m^2 + 3m + 3}, \text{ 又 } m \geq$$

$$-1, \text{ 所以 } m^2 + 3m + 3 = \left(m + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq 1, \text{ 故 } \tan \frac{\beta}{2} =$$

$$\frac{1}{m^2 + 3m + 3} \in (0, 1].$$

二、填空题

13. $-\frac{12}{13}$ 14. $-\frac{2}{3}$ 15. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} \right]$

16. $[\sqrt{3}, +\infty)$

提示: 依题意, 得 $f(x) = 3\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} +$

$$\sqrt{6} \cos^2 \frac{x}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} - m = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} +$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \frac{x}{2} - m = \sqrt{6} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - m \leq 0 \text{ 在}$$

$$\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{所以 } m \geq \sqrt{6} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \text{ 在 } \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \text{ 上恒成立.}$$

$$\text{由于 } -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } -\sqrt{3} \leq \sqrt{6} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \leq \sqrt{3},$$

$$\text{故 } m \geq \sqrt{3}.$$

三、解答题

17. 解: (1) 因为 $f(x) = A \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$,

$$\text{且 } f \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } A \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \right) = A \sin \frac{2\pi}{3} = A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{3}{2}, \text{ 所以 } A = \sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } f(x) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\text{且 } f(\theta) + f(-\theta) = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } f(\theta) + f(-\theta)$$

$$= \sqrt{3} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \sin \left(-\theta + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$= \sqrt{3} \left[\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) + \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \right. \right.$$

$$\left. \cos \theta - \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta \right)$$

$$= \sqrt{3} \cdot 2 \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{6} \cos \theta = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 且 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{所以 } f \left(\frac{3\pi}{4} - \theta \right) = \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \theta + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\sqrt{3} \sin(\pi - \theta) = \sqrt{3} \sin \theta = \frac{\sqrt{30}}{4}.$$

18. 解: 因为

$$f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{3}{4} \sin^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{8} - \frac{3 - 3 \cos 2x}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } g(x) = f(x) + \sin x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} + \sin x =$$

$$\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x - \frac{1}{4} = -\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4} =$$

$$-\left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

$$\text{设 } t = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right], \text{ 则 } t \in \left[-\frac{1}{2}, 1 \right].$$

$$\text{所以当 } t = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } x = -\frac{\pi}{6} \text{ 时,}$$

$$g(x) \text{ 有最小值为 } -\frac{1}{2};$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } g(x) \text{ 有最大值为 } \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的值域为 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

19. 解: (1) $f(x) = 2A \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} x + \varphi \right) - A =$

$$A \left[2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} x + \varphi \right) - 1 \right] = A \cos \left(\frac{\pi}{3} x + 2\varphi \right),$$

$$\text{所以 } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6.$$

$$\text{将 } P(1, A) \text{ 代入得 } \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\varphi \right) = 1 \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{故 } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{ 设点 } Q \text{ 的坐标为 } (x_0, -A),$$

$$\text{由题意可知 } x_0 - 1 = 3,$$

$$\text{解得 } x_0 = 4, \text{ 所以 } Q(4, -A),$$

$$\text{则 } |PQ|^2 = (4-1)^2 + (-A-A)^2 = 9+4A^2.$$

$$\text{又 } |RP| = A, |RQ|^2 = (4-1)^2 + (-A-0)^2 = 9+A^2,$$

$$\text{在 } \triangle PRQ \text{ 中, } \angle PRQ = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{由余弦定理, 得}$$

$$\cos \angle PRQ = \frac{|RP|^2 + |RQ|^2 - |PQ|^2}{2|RP| \cdot |RQ|}$$

$$= \frac{A^2 + 9 + A^2 - (9 + 4A^2)}{2A \cdot \sqrt{9 + A^2}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } A^2 = 3.$$

$$\text{又 } A > 0, \text{ 所以 } A = \sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle PRO} = \frac{1}{2} RP \cdot RQ \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A \cdot \sqrt{9 + A^2} \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{12} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

20. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$f(x) = 4 \tan x \cos x \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$$

$$= 4 \sin x \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3} (1 - \cos 2x) - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$(2) \text{ 由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{得 } -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{设 } A = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right], B = \left\{ x \mid -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \right.$$

$$\left. \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ 易知 } A \cap B = \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right],$$

$$\text{所以, 当 } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \text{ 时, } f(x) \text{ 在区间}$$

$$\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right] \text{ 上单调递增, 在区间 } \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12} \right] \text{ 上}$$

单调递减.

21. 解: (1) 由条件得 $A = 2, \frac{T}{4} = 3$, 所以 $T = 12$,

$$\text{因为 } T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ 所以 } \omega = \frac{\pi}{6}.$$

所以曲线段 FBC 的解析式为

$$y = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} x + \frac{2\pi}{3} \right), x \in [-4, 0].$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = OC = \sqrt{3},$$

$$\text{又 } CD = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \angle COD = \frac{\pi}{4}, \text{ 即 } \angle DOE = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 易知 } OD = \sqrt{6}, \text{ 当“矩形草坪”的面积取最大值时, 点 } P \text{ 在弧 } DE \text{ 上, 故 } OP = \sqrt{6}.$$

$$\text{由题意可知 } 0 < \theta < \frac{\pi}{4},$$

所以“矩形草坪”的面积为

$$S = \sqrt{6} \sin \theta (\sqrt{6} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta)$$

$$= 6(\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= 6 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) - 3,$$

$$\text{因为 } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \text{ 所以因为 } \frac{\pi}{4} < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{故当 } 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{8} \text{ 时,}$$

“矩形草坪”的面积最大.

22. (1) 解: 将 $g(x) = \cos x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 得到

$$y = 2 \cos x \text{ 的图象, 再将 } y = 2 \cos x \text{ 的图象向右平移}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ 个单位长度后得到 } y = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \text{ 的图象, 故}$$

$$f(x) = 2 \sin x, \text{ 所以函数 } f(x) = 2 \sin x \text{ 图象的对称轴}$$

$$\text{方程为 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(2) \text{ ① 解: } f(x) + g(x) = 2 \sin x + \cos x$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{5} \sin(x + \varphi) \left(\text{其中 } \tan \varphi = \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{依题意, } \sin(x + \varphi) = \frac{m}{\sqrt{5}} \text{ 在区间 } [0, 2\pi) \text{ 内}$$

$$\text{有两个不同的解 } \alpha, \beta \text{ 当且仅当 } \left| \frac{m}{\sqrt{5}} \right| < 1,$$

$$\text{解得 } -\sqrt{5} < m < \sqrt{5},$$

$$\text{故 } m \text{ 的取值范围是 } (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

② 证明: 因为 α, β 是方程 $\sqrt{5} \sin(x + \varphi) = m$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 内的两个不同的解,

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \varphi) = \frac{m}{\sqrt{5}}, \sin(\beta + \varphi) = \frac{m}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{当 } 1 \leq m < \sqrt{5} \text{ 时, } \alpha + \beta = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right),$$

$$\text{即 } \alpha - \beta = \pi - 2(\beta + \varphi);$$

$$\text{当 } -\sqrt{5} < m < 1 \text{ 时, } \alpha + \beta = 2 \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right),$$

$$\text{即 } \alpha - \beta = 3\pi - 2(\beta + \varphi).$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = -\cos 2(\beta + \varphi) = 2 \sin^2(\beta + \varphi) - 1 =$$

$$2 \left(\frac{m}{\sqrt{5}} \right)^2 - 1 = \frac{2m^2}{5} - 1.$$

数学·高考版(文)

第 15 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.B 3.A 4.A 5.B 6.B

7.A 8.B 9.B 10.D 11.C

12.A

提示:由 $a\cos B=b(1+\cos A)$ 结合正弦定理,得 $\sin A\cos B=\sin B(1+\cos A)$,

$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$,

$\sin(A-B)=\sin B$.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

所以 $A-B=B$, 即 $A=2B$.

所以 $2B<90^\circ$, $B<45^\circ$; $A+B=3B>90^\circ$, $B>30^\circ$, 所以 $30^\circ<B<45^\circ$, $45^\circ<C<90^\circ$.

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=2$, 所以 $ab=\frac{4}{\sin C}$,

所以 $(c+a-b)(c+b-a)=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2-b^2+2ab=-2ab\cos C+2ab=\frac{8}{\sin C}(1-\cos C)=$

$\frac{8 \times 2 \sin \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}=8 \tan \frac{C}{2}$.

因为 $45^\circ<C<90^\circ$, 所以 $\sqrt{2}-1<\tan \frac{C}{2}<1$,
所以 $(c+a-b)(c+b-a) \in (8\sqrt{2}-8, 8)$.
故选 A.

二、填空题

13. $\frac{21}{13}$ 14. $(2, \frac{4\sqrt{3}}{3})$ 15. $(2, 8)$

16. 60

提示: $AB=\frac{46}{\sin 67^\circ}$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 可知 $\frac{AB}{\sin 30^\circ}=\frac{BC}{\sin 37^\circ}$, 所以 $BC=\frac{AB \sin 37^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{46 \cdot \sin 37^\circ}{\sin 67^\circ \cdot \sin 30^\circ} \approx 60$.

三、解答题

17. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 可得 $a \sin B=b \sin A$.

又由 $a \sin 2B=\sqrt{3} b \sin A$,

得 $2a \sin B \cos B=\sqrt{3} b \sin A=\sqrt{3} a \sin B$,

所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2) 由 $\cos A=\frac{1}{3}$, 可得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=$

$\sin(A+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2} \sin A+\frac{1}{2} \cos A=\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

18. 解: (1) 因为 $c(b\cos A-\frac{a}{2})=b^2-a^2$,

所以 $2bcc\cos A-ac=2(b^2-a^2)$,

所以 $b^2+c^2-a^2-ac=2(b^2-a^2)$,

所以 $a^2+c^2-b^2=ac$.

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$.

又 $0<B<\pi$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得

$(\frac{\sqrt{129}}{2})^2=c^2+(\frac{b}{2})^2-2c \cdot \frac{b}{2} \cos A$,

所以 $\frac{129}{4}=c^2+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{7}bc$. ①

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$.

由已知, 得

$\sin A=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+$

$\cos A\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,

所以 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{5}{7}b$. ②

由①②解得 $\begin{cases} b=7, \\ c=5. \end{cases}$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{3}$.

19. 解: (1) 因为 $C=\pi-(A+B)$,

所以 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}}=-1$.

又因为 $0<C<\pi$, 所以 $C=\frac{3\pi}{4}$.

(2) 因为 $C=\frac{3\pi}{4}$,

所以 AB 边最大, 即 $AB=\sqrt{17}$.

又因为 $\tan A<\tan B$, $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以角 A 最小, BC 边为最小边.

由 $\begin{cases} \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{4}, \text{ 且 } A \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \sin^2 A+\cos^2 A=1, \end{cases}$

得 $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. 由 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$, 得

$BC=AB \cdot \frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$.

所以最小边 BC 的长为 $\sqrt{2}$.

20. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 根据余弦定理

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$, 而 $A \in (0, \pi)$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) $f(x)=\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}+\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2}=$

$\frac{1}{2} \sin x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(B)=\sin(B+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以当 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,

即 $B=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(B)$ 取最大值,

此时 $C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

21. 解: (1) 设小艇与轮船在 B 处相遇,

相遇时小艇航行的距离为 s 海里, 如图所示. 在 $\triangle AOB$ 中, $A=90^\circ-30^\circ=60^\circ$,

所以 $s=\sqrt{900t^2+400-2 \times 30t \times 20 \times \cos 60^\circ}$

$=\sqrt{900t^2-600t+400}$

$=\sqrt{900(t-\frac{1}{3})^2+300}$.

故当 $t=\frac{1}{3}$ 时, $s_{\min}=10\sqrt{3}$ (海里),

此时 $v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}$ (海里/小时).

即小艇以 $30\sqrt{3}$ 海里/小时的速度航行,

相遇时小艇的航行距离最短.

30t

20 30

O

(第 21 题图)

(2) 由题意可知 $OB=vt$, 在 $\triangle AOB$ 中,

由余弦定理, 得

$v^2t^2=400+900t^2-2 \times 20 \times 30t \cos 60^\circ$,

故 $v^2=900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2}$.

因为 $0<v \leq 30$,

所以 $900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2} \leq 900$.

即 $\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t} \leq 0$, 解得 $t \geq \frac{2}{3}$. 又 $t=\frac{2}{3}$ 时,

$v=30$, 故 $v=30$ 时, t 取得最小值, 且最小值

等于 $\frac{2}{3}$.

此时, 在 $\triangle OAB$ 中, 有 $OA=OB=AB=$

20, 故可设计航行方案如下: 航行方向为北

偏东 30° , 航行速度为 30 海里/小时, 小艇

能以最短时间与轮船相遇.

22. 解: (1)

$f(x)=2\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2}-2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$=\sqrt{3}(1+\cos x)-\sin x$

$=2 \cos(x+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}$.

由 $2 \cos(\theta+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}=\sqrt{3}+1$,

得 $\cos(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$,

于是 $\theta+\frac{\pi}{6}=2k\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$,

因为 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{6}$.

(2) 因为 $C \in (0, \pi)$,

由 (1) 知, $C=\frac{\pi}{6}$.

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}ab \sin \frac{\pi}{6}$,

于是 $ab=2\sqrt{3}$. ①

在 $\triangle ABC$ 中, 设内角 A, B 的对边分别

是 a, b .

由余弦定理, 得 $1=a^2+b^2-2ab \cos \frac{\pi}{6}=$

a^2+b^2-6 , 所以 $a^2+b^2=7$. ②

由①②可得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=2. \end{cases}$

于是 $a+b=2+\sqrt{3}$.

由正弦定理, 得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{1}=$

$\frac{1}{2}$, 所以 $\sin A+\sin B=\frac{1}{2}(a+b)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

数学·高考版(文)

第 16 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.B 3.A 4.C 5.A 6.C

7.C 8.C 9.B 10.B 11.C

12.A

提示:由题意,得

$$a_n=n, b_n=f(-1)=f(3)=4+n,$$

$$\text{所以 } c_n=(4+n)^2-n(4+n)=4n+16,$$

$$\text{所以 } c_n=20+4(n-1),$$

所以 $\{c_n\}$ 是以 20 为首项, 4 为公差的等差数列.

二、填空题

13.1 14.8 15.-2

16.2

提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 d ,

$$\text{又有 } \begin{cases} a_1-a_2=8, \\ a_3+a_5=26, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2d=8, \\ 2a_1+6d=26, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1=1, \\ d=4. \end{cases}$$

$$\text{所以 } T_n=\frac{n+\frac{n(n-1)}{2} \cdot 4}{n^2}=2-\frac{1}{n},$$

$$\text{所以 } T_n < 2, \text{ 所以 } M \geq 2.$$

三、解答题

17.解:在等差数列 $\{a_n\}$ 中,有

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_6=48, \\ a_{18}+a_{17}+\cdots+a_{13}=192, \end{cases}$$

$$\text{相加,得 } (a_1+a_{18})+\cdots+(a_6+a_{13})=240.$$

$$\text{所以 } 6(a_1+a_{18})=240,$$

$$\text{所以 } a_1+a_{18}=40,$$

$$\text{所以 } S_{18}=\frac{(a_1+a_{18}) \times 18}{2}=360.$$

18.解:(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$,

由题意,得 $a_2^2=a_1a_6$,

$$\text{即 } (a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+5d),$$

$$\text{化简,得 } 2a_1d+11d^2=0.$$

$$\text{又 } a_1=11, \text{ 所以 } d=-2, \text{ 或 } d=0(\text{舍去}),$$

$$\text{故 } a_n=-2n+13.$$

(2)由(1)知当 $n \leq 6$ 时, $a_n > 0$;

当 $n \geq 7$ 时, $a_n < 0$.

$$\text{当 } n \leq 6 \text{ 时, } S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+$$

$$|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=12n-n^2.$$

当 $n \geq 7$ 时,

$$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_6|+|a_7|+\cdots+$$

$$|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6-(a_7+a_8+\cdots+a_n)=2(a_1+$$

$$a_2+a_3+\cdots+a_6)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2S_6-$$

$$\left[na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right]=72-(12n-n^2)=n^2-12n+72.$$

$$\text{所以 } S_n=\begin{cases} 12n-n^2, n \leq 6, \\ n^2-12n+72, n \geq 7. \end{cases}$$

19.解:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d.$$

$$\text{因为 } S_7=7, S_{15}=75,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 7a_1+21d=7, \\ 15a_1+105d=75, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1=-2, \\ d=1. \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1),$$

$$\text{因为 } \frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2},$$

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列,

其首项为 -2, 公差为 $\frac{1}{2}$,

$$\text{所以 } T_n=-2n+\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n.$$

20.解:(1)由题意可设

$$a_n=4+(n-1)d(d \neq 0),$$

$$\text{又有 } S_3=12+3d, S_4=16+6d, S_5=20+10d,$$

$$\text{因为 } \left(\frac{1}{5}S_5\right)^2=\frac{1}{3}S_3 \cdot \frac{1}{4}S_4,$$

$$\text{所以 } (4+2d)^2=(4+d)\left(4+\frac{3}{2}d\right).$$

$$\text{所以 } d=-\frac{12}{5}, \text{ 或 } d=0(\text{舍去}).$$

$$\text{所以 } a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}.$$

$$(2)S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2} \times \left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{6}{5}n^2+$$

$$\frac{26}{5}n, \text{ 因为 } S_n > 0, \text{ 所以 } -\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n > 0, \text{ 即}$$

$$0 < n < \frac{13}{3}, \text{ 又因为 } n \in \mathbf{N}_+, \text{ 所以 } n \text{ 的最大值}$$

为 4.

21.(1)解:设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,

$$\text{所以 } a_n=dn+a_1-d.$$

$$\text{又因为 } a_na_{n+1}=4n^2-1,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1=1, \\ d=2, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1=-1, \\ d=-2. \end{cases}$$

$$\text{又因为 } d > 0, \text{ 所以 } a_1=1, d=2,$$

$$\text{所以 } a_n=2n-1.$$

$$(2)\text{证明:因为 } \frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{4n^2-1}$$

$$=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\cdots+\frac{2}{a_na_{n+1}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n+1} < 1.$$

22.解:(1)由题意可知,

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1=a,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n=\frac{a}{a-1}(a_n-1), \quad \textcircled{1}$$

$$S_{n-1}=\frac{a}{a-1}(a_{n-1}-1), \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}-\textcircled{2}, \text{ 得 } \frac{a_n}{a_{n-1}}=a,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,

$$\text{所以 } a_n=a^n(n \in \mathbf{N}_+).$$

(2)因为 $b_n=a_n \cdot \lg a_n$,

$$\text{所以 } b_n=n \cdot a^n \cdot \lg a,$$

$$\text{对一切 } n \in \mathbf{N}_+, \text{ 都有 } b_n < b_{n+1},$$

$$\text{即有 } n \cdot a^n \cdot \lg a < (n+1) \cdot a^{n+1} \cdot \lg a,$$

①当 $\lg a > 0$, 即 $a > 1$ 时,

$$\text{有 } a > \frac{n}{n+1} \text{ 对一切 } n \in \mathbf{N}_+, \text{ 都成立,}$$

所以 $a > 1$;

②当 $\lg a < 0$, 即 $0 < a < 1$ 时,

$$\text{有 } a < \frac{n}{n+1} \text{ 对一切 } n \in \mathbf{N}_+, \text{ 都成立,}$$

$$\text{所以 } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

综上,可知 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup$

$(1, +\infty)$.