

数学·高考版(文)

第2期

第2-3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.B 4.C 5.C 6.C 7.D 8.A
9.A 10.D 11.A

12.B

提示:由 $x+2y+4=4xy$, 得 $x+2y=4xy-4$, 不等式可化为 $(4xy-4)a^2+2a+2xy-34 \geq 0$ 恒成立, 化简, 得 $xy \geq \frac{2a^2-a+17}{2a^2+1}$ 恒成立. 根据基本不等式,

有 $x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$, 所以 $4xy = x+2y+4 \geq 4+2\sqrt{2xy}$, 即 $2(\sqrt{xy})^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy} - 2 \geq 0$, 解得 $\sqrt{xy} \geq \sqrt{2}$, $xy \geq 2$. 所以 $\frac{2a^2-a+17}{2a^2+1} \leq 2$, 解得 $a \leq -3$, 或 $a \geq \frac{5}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是

$(-\infty, -3] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$.

二、填空题

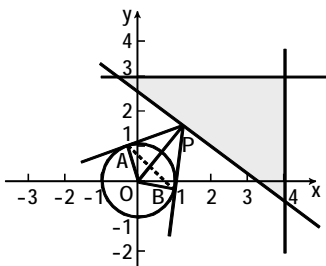
13.6 14.-3 15.8

16. $\frac{1}{2}$

提示:如图所示, $\angle PAB = \angle AOP$, 设 $P(x, y)$, 则 $\cos \angle PAB = \cos \angle AOP = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 当

$\angle PAB$ 最小时, $\cos \angle PAB$ 最大, 即 $\sqrt{x^2+y^2}$ 最小, P 点即为可行域内离原点最近的点, 此时 OP 垂直于直线 $3x+4y-10=0$, $|OP| = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}} =$

$\frac{10}{5}=2$, 所以 $\cos \angle PAB$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.



(第16题图)

三、解答题

17. 证明: (1) 因为 $a>0, b>0, c>0, abc=1$,

所以 $\frac{1}{ab}+1=c+1 \geq 2\sqrt{c}$, $\frac{1}{bc}+1=a+1 \geq$

$2\sqrt{a}$, $\frac{1}{ca}+1=b+1 \geq 2\sqrt{b}$,

三式相乘, 得

$(\frac{1}{ab}+1)(\frac{1}{bc}+1)(\frac{1}{ca}+1) \geq 8\sqrt{abc}=8$.

(2) 因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=ab+bc+ca$,

所以 $ab+bc \geq 2\sqrt{ab^2c}=2\sqrt{b}$,

$ab+ac \geq 2\sqrt{a^2bc}=2\sqrt{a}$,

$bc+ac \geq 2\sqrt{abc^2}=2\sqrt{c}$,

三式相加, 得

$2(ab+bc+ca) \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$,

所以 $ab+bc+ca \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$,

即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

18. 解: 设第一化工厂每天处理工业废水 x 万立方米, 需满足 $\frac{2-x}{500} \leq 0.2\%$, $0 \leq x \leq 2$.

设第二化工厂每天处理工业废水 y 万立方米, 需满足 $\frac{0.8(2-x)+(1.4-y)}{700} \leq 0.2\%$, $0 \leq y \leq$

1.4. 两个化工厂每天处理工业废水总的费用为 $z=1000x+800y$ 元.

问题转化为在约束条件

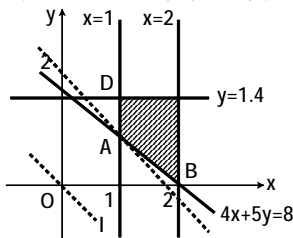
$$\begin{cases} \frac{2-x}{500} \leq 0.2\%, \\ \frac{0.8(2-x)+(1.4-y)}{700} \leq 0.2\%, \\ 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 1.4, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x \geq 1, \\ 4x+5y \geq 8, \\ 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 1.4 \end{cases}, \text{下求目标函数 } z=200(5x+4y)$$

的最小值.

作出约束条件表示的平面区域, 如图中阴影部分所示, 作直线 $l: 5x+4y=0$, 并将直线 l 向上平移到过点 $A(1, 0.8)$ 时, z 取得最小值, 最小值为 $z_{\min}=200 \times (5 \times 1 + 4 \times 0.8) = 1640$ (元).

所以第一化工厂处理 1 万立方米工业废水, 第二化工厂处理 0.8 万立方米工业废水时, 才能使这两个工厂总的工业废水处理费用最小.



(第18题图)

19. 解: (1) 不等式 $|x-1|+|x+1|<m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m>(|x-1|+|x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1|+|x+1| \geq |x-1-x-1|=2$,

所以 $m>2$,

故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(2) 由 (1) 得 $m-2>0$, 则 $f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}=$

$\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{(m-2)^2}+2$,

所以

$f(m) \geq 3\sqrt{\frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{2}(m-2) \cdot \frac{1}{(m-2)^2}} + 2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}+2$,

当且仅当 $\frac{1}{2}(m-2)=\frac{1}{(m-2)^2}$,

即 $m=\sqrt[3]{2}+2>2$ 时, 等号成立,

所以函数 $f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}$ 的最小值为

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$.

20. 解: (1) 由题意, 得

$12(500-x)(1+0.5x\%) \geq 12 \times 500$,

整理, 得 $x^2-300x \leq 0$.

又 $x>0$, 故 $0<x \leq 300$.

所以 x 的取值范围是 $(0, 300]$.

(2) 由题意知, 生产 B 产品创造的利润为

$12(a-\frac{13}{1000}x)$ 万元,

设备升级后, 生产 A 产品创造的利润为

$12(500-x)(1+0.5x\%)$ 万元,

则 $12(a-\frac{13}{1000}x)x \leq 12(500-x)(1+0.5x\%)$

恒成立,

所以 $ax \leq (\frac{x^2}{125}+500+\frac{3}{2}x)_{\min}$, 且 $x>0$,

所以 $a \leq (\frac{x}{125}+\frac{500}{x}+\frac{3}{2})_{\min}$.

因为 $\frac{x}{125}+\frac{500}{x}+\frac{3}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x}{125} \cdot \frac{500}{x}}+\frac{3}{2}=5.5$,

当且仅当 $x=250$ 时, 等号成立,

所以 $0<a \leq 5.5$, 所以 a 的最大值为 5.5.

21. 解: (1) 由题意知, 可行域 M 如图所示.

由 $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以 $A(1, \frac{1}{2})$.

由 $\begin{cases} x=1, \\ 2x+y=10, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=8, \end{cases}$ 所以 $B(1, 8)$.

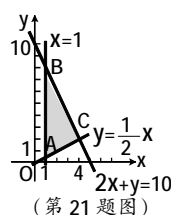
由 $\begin{cases} 2x+y=10, \\ y=\frac{1}{2}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=4, \\ y=2, \end{cases}$ 所以 $C(4, 2)$.

因为 $k_{AC}=\frac{1}{2}$, $z_1=y-2x$,

所以 $y=2x+z_1$, z_1 是 y 轴的截距, $k=2>k_{AC}=\frac{1}{2}$,

所以过点 $B(1, 8)$ 时, $(z_1)_{\max}=8-2 \times 1=6$.

因为 $z_2=x^2+y^2$ 表示区域 M 上的点 (x, y) 到原点 $O(0, 0)$ 距离的平方, 如图, 点 $A(1, \frac{1}{2})$ 使所求距离的平方最小, 所以 $(z_2)_{\min}=1^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$.



(第21题图)

(2) 因为 $a>0, y=2a\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=$

$a\sin(x+\frac{\pi}{2})=a\cos x$ 过区域 M 中的点, 而区域中 $1 \leq x \leq 4$.

又因为 $a>0$,

函数 $y=a\cos x$ 图象过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $1<\frac{\pi}{2}<4$,

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时, $y<0, \frac{3\pi}{2}>4$,

所以满足 $y=a\cos x$ 过区域 M 中的点,

只需图象与射线 $x=1(y \geq \frac{1}{2})$ 有公共点,

所以只需 $x=1$ 时, $a\cos 1 \geq \frac{1}{2}$,

所以 $a \geq \frac{1}{2\cos 1}$,

所以 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2\cos 1}, +\infty)$.

22. 解: (1) 因为 $f'(x)=x^2+2ax-b$,

由题意知 $f'(1)=-4$, 且 $f(1)=-\frac{11}{3}$,

所以 $\begin{cases} 1+2a-b=-4, \\ \frac{1}{3}+a-b=-\frac{11}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=3, \end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x, f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=-1, x_2=3$,

当 x 变化时, $f(x), f'(x)$ 变化情况如下表:

| x | $(-\infty, -1)$ | -1 | $(-1, 3)$ | 3 | $(3, +\infty)$ |
|---------|-----------------|------|------------|-----|----------------|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \nearrow | 极大值 | \searrow | 极小值 | \nearrow |

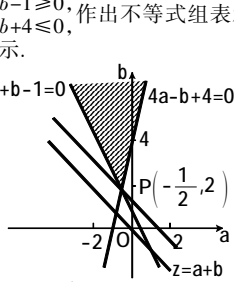
所以当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(-1)=\frac{5}{3}$.

(2) 因为 $y=f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上是单调减函数,

所以 $f'(x)=x^2+2ax-b \leq 0$ 在区间 $[-1, 2]$ 上恒成立.

根据二次函数图象可知 $f'(-1) \leq 0, f'(2) \leq 0$, 则 $\begin{cases} 1-2a-b \leq 0, \\ 4+4a-b \leq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2a+b \geq 1, \\ 4a-b \leq 0, \end{cases}$ 作出不等式组表示的平面区域如图所示.



(第22题图)

当直线 $z=a+b$ 经过交点 $P(-\frac{1}{2}, 2)$ 时, $z=a+b$

b 取得最小值 $-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$,

所以 $z=a+b$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.