数学·高考版(理)

第1期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.C 3.A 4.C 5.D 6.A

7.D 8.C 9.A 10.C 11.B

12.C

提示:由题设,易验证函数$f(x)=x^3+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$满足$f(-x)=-f(x)$,即函数$f(x)$是奇函数,易知函数f(x)在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.又已知不等式可化为$f\left(\frac{a-3a^2}{a^3-3}\right)<f(-1)$,所以$\frac{a-3a^2}{a^3-3}<-1$,即$\frac{a-3a^2+a^3-3}{a^3-3}<0$,也即$\frac{(a-3)(a^2+1)}{a^3-3}<0$,解得$\sqrt[3]{3}<a<3$,故选C.

二、填空题

13.$[-5,1)\cup(1,+\infty)$

14.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

15.-2

16.$[-1,+\infty)$

提示:因为$x\in[1,2]$及$y\in[2,3]$,所以由$xy\leqslant ax^2+2y^2$,得$a\geqslant\frac{xy-2y^2}{x^2}=\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2$.令$t=\frac{y}{x}$,结合$x\in[1,2]$及$y\in[2,3]$,可得$1\leqslant t\leqslant 3$,于是问题转化为$a\geqslant-2t^2+t$在$t\in[1,3]$上恒成立.显然$f(t)=-2t^2+t$在$[1,3]$上单调递减,所以当$t=1$时,f(t)取得最大值且为$-1$,所以$a\geqslant-1$.

三、解答题

17.**证明**:当$x\geqslant4$时,要证$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$,只需证$(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2})^2>(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1})^2$,需证$x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2>x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$,即证$\sqrt{(x-3)(x-2)}>\sqrt{(x-4)(x-1)}$,只需证$x^2-5x+6>x^2-5x+4$,即证$6>4$,显然上式成立,所以原不等式成立,即$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$.

18.(1)**解**:$f(x)=|2x-1|+x+\frac{1}{2}=\begin{cases}3x-\frac{1}{2},x\geqslant\frac{1}{2},\\-x+\frac{3}{2},x<\frac{1}{2},\end{cases}$所以$[f(x)]_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,

所以$m=1$.

(2)**证明**:因为$a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a^2-b^2)\cdot(a-b)=(a-b)^2(a+b)\geqslant0$,$a+b+c=1$,所以$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2=ab(a+b)=ab(1-c)=ab-abc$.同理可证:$b^3+c^3\geqslant bc-abc$,$c^3+a^3\geqslant ca-abc$.三式相加,得$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab+bc+ca-3abc$.

19.**解**:(1)要使不等式$mx^2-2x-m+1<0$恒成立,只需$\begin{cases}m<0,\\\Delta=(-2)^2-4m(-m+1)<0,\end{cases}$该不等式组无解.所以不存在实数$m$,使对所有的实数$x$,不等式$mx^2-2x-m+1<0$恒成立.

(2)由$|m|\leqslant2$,得$-2\leqslant m\leqslant2$.

由$mx^2-2x-m+1<0$,

得$(x^2-1)m-2x+1<0$.

令$f(m)=(x^2-1)m-2x+1(-2\leqslant m\leqslant2)$,

则$f(m)<0$.

当$x=1$时,$f(m)=-1<0$,满足题意;

当$x=-1$时,$f(m)=3>0$,不满足题意;

当$x\neq\pm1$时,要使$f(m)<0$,

只需$\begin{cases}f(-2)<0,\\f(2)<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}(x^2-1)(-2)-2x+1<0,\\(x^2-1)\times2-2x+1<0,\end{cases}$

解得$\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

综上,x的取值范围是

$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

20.**解**:(1)原不等式可化为$|x-2|>4-x^2$,即$x-2>4-x^2$,或$x-2<x^2-4$.

由$x-2>4-x^2$,得$x>2$,或$x<-3$;

由$x-2<x^2-4$,得$x>2$,或$x<-1$.

综上,原不等式的解集为$\{x|x>2$,或$x<-3\}$.

(2)关于x的不等式$f(x)<g(x)$的解集非空等价于$|x-2|+|x+7|<3m$的解集非空,

令$h(x)=|x-2|+|x+7|$,

即$[h(x)]_{\min}<3m$.

由$|x-2|+|x+7|\geqslant|x-2-x-7|=9$,

所以$[h(x)]_{\min}=9$,

由$3m>9$,解得$m>3$.

所以实数m的取值范围是$(3,+\infty)$

21.**解**:(1)当$a=1$时,$f(x)=|x-1|+|2x-1|$,$f(x)\leqslant2\Leftrightarrow|x-1|+|2x-1|\leqslant2$,

上述不等式可化为$\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2},\\1-x+1-2x\leqslant2,\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1,\\1-x+2x-1\leqslant2,\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1,\\x-1+2x-1\leqslant2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2},\\x\geqslant0,\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1,\\x\leqslant2,\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1,\\x\leqslant\frac{4}{3},\end{cases}$

所以$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,或$\frac{1}{2}<x<1$,或$1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$,

所以原不等式的解集为$\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\right\}$.

(2)因为$f(x)\leqslant|2x+1|$的解集包含$\left[\frac{1}{2},1\right]$,

所以当$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时,

不等式$f(x)\leqslant|2x+1|$恒成立,

即$|x-a|+|2x-1|\leqslant|2x+1|$在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$上恒成立.

所以$|x-a|+2x-1\leqslant2x+1$,

即$|x-a|\leqslant2$,

所以$-2\leqslant x-a\leqslant2$,

所以$x-2\leqslant a\leqslant x+2$在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$上恒成立,

所以$(x-2)_{\max}\leqslant a\leqslant(x+2)_{\min}$,

所以$-1\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$,

所以实数a的取值范围是$\left[-1,\frac{5}{2}\right]$.

22.**解**:(1)因为$k>0$,$f(x)>m$,

即$\frac{kx}{x^2+3k}>m$,

所以$mx^2-kx+3km<0$.

因为不等式$mx^2-kx+3km<0$的解集为$\{x|x<-3$,或$x>-2\}$,

所以-3,-2是方程$mx^2-kx+3km=0$的根,且$m<0$,

所以$\begin{cases}\frac{k}{m}=-5,\\3k=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\m=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

所以$5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0\Leftrightarrow2x^2-x-3<0$,

解得$-1<x<\frac{3}{2}$,

所以不等式$5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0$的解集为$\left\{x\middle|-1<x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2)因为$f(x)>1$,所以$\frac{kx}{x^2+3k}>1$,所以$x^2-kx+3k<0$,令$g(x)=x^2-kx+3k$,$x\in(3,+\infty)$,存在$x_0>3$,使得$f(x_0)>1$成立,即存在$g(x_0)<0$成立,即$[g(x)]_{\min}<0$成立.当$0<k\leqslant6$时,$g(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增,所以$g(x)>g(3)=9$,显然不存在$g(x)<0$;当$k>6$时,$g(x)$在$\left(3,\frac{k}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{k}{2},+\infty\right)$上单调递增,所以$[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}+3k$,由$-\frac{k^2}{4}+3k<0$,又$k>0$,可得$k>12$.

综上,k的取值范围是$(12,+\infty)$.