数学·高考版(理)

第 2 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.B　4.C　5.C　6.C　7.D　8.A　9.A　10.D　11.A

12.B

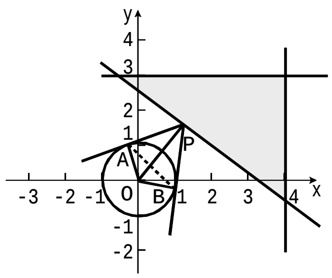
提示:由 $x+2y+4=4xy$,得 $x+2y=4xy-4$,不等式可化为 $(4xy-4)a^2+2a+2xy-34\geqslant 0$ 恒成立,化简,得 $xy\geqslant\frac{2a^2-a+17}{2a^2+1}$ 恒成立.根据基本不等式,有 $x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$,所以 $4xy=x+2y+4\geqslant 4+2\sqrt{2xy}$,即 $2(\sqrt{xy})^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}-2\geqslant 0$,解得 $\sqrt{xy}\geqslant\sqrt{2}$,$xy\geqslant 2$.所以 $\frac{2a^2-a+17}{2a^2+1}\leqslant 2$,解得 $a\leqslant -3$,或 $a\geqslant\frac{5}{2}$,所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

二、填空题

13.6　14.-3　15.8

16.$\frac{1}{2}$

提示:如图所示,$\angle PAB=\angle AOP$,设 $P(x,y)$,则 $\cos\angle PAB=\cos\angle AOP=\frac{OA}{OP}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.当 $\angle PAB$ 最小时,$\cos\angle PAB$ 最大,即 $\sqrt{x^2+y^2}$ 最小,P 点即为可行域内离原点最近的点,此时 OP 垂直于直线 $3x+4y-10=0$,$|OP|=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$,所以 $\cos\angle PAB$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**证明**:(1)因为 $a>0,b>0,c>0,abc=1$,

所以 $\frac{1}{ab}+1=c+1\geqslant 2\sqrt{c}$,$\frac{1}{bc}+1=a+1\geqslant 2\sqrt{a}$,$\frac{1}{ca}+1=b+1\geqslant 2\sqrt{b}$,

三式相乘,得

$\left(\frac{1}{ab}+1\right)\left(\frac{1}{bc}+1\right)\left(\frac{1}{ca}+1\right)\geqslant 8\sqrt{abc}=8$.

(2)因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=ab+bc+ca$,

所以 $ab+bc\geqslant 2\sqrt{ab^2c}=2\sqrt{b}$,

$ab+ac\geqslant 2\sqrt{a^2bc}=2\sqrt{a}$,

$bc+ac\geqslant 2\sqrt{abc^2}=2\sqrt{c}$,

三式相加,得

$2(ab+bc+ca)\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$,

所以 $ab+bc+ca\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$,

即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

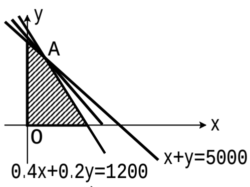
18.**解**:设投资人对甲、乙两个项目分别投资 x,y 万元,则由题意,得

$$\begin{cases}x+y\leqslant 5000,\\0.4x+0.2y\leqslant 1200,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$$

五年后可能的盈利为 $z=x+0.8y$.

画出满足上述不等式组的可行域,如图所示,平行直线系 $x+0.8y=z$ 经过直线 $x+y=5000$ 与直线 $0.4x+0.2y=1200$ 的交点 $A(1000,4000)$时,目标函数 $z=x+0.8y$ 取得最大值,即 $z_{\max}=1000+0.8\times 4000=4200$(万元),

因此,对甲、乙两项目分别投资 1000 万元和 4000 万元,才能使五年后可能的盈利最大.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)不等式 $|x-1|+|x+1|<m$ 的解集不是空集的充要条件是 $m>(|x-1|+|x+1|)_{\min}$,

因为 $|x-1|+|x+1|\geqslant|x-1-x-1|=2$,

所以 $m>2$,

故实数 m 的取值范围是$(2,+\infty)$.

(2)由(1)得 $m-2>0$,则 $f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}=\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{(m-2)^2}+2$,

所以

$f(m)\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(m-2)\cdot\frac{1}{2}(m-2)\cdot\frac{1}{(m-2)^2}}+2=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$,

当且仅当 $\frac{1}{2}(m-2)=\frac{1}{(m-2)^2}$,

即 $m=\sqrt[3]{2}+2>2$ 时,等号成立,

所以函数 $f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$.

20.**解**:(1)由题意,得

$12(500-x)(1+0.5x\%)\geqslant 12\times 500$,

整理,得 $x^2-300x\leqslant 0$.

又 $x>0$,故 $0<x\leqslant 300$.

所以 x 的取值范围是$(0,300]$.

(2)由题意知,生产 B 产品创造的利润为 $12\left(a-\frac{13}{1000}x\right)$万元,

设备升级后,生产 A 产品创造的利润为 $12(500-x)(1+0.5x\%)$万元,

则 $12\left(a-\frac{13}{1000}x\right)x\leqslant 12(500-x)(1+0.5x\%)$ 恒成立,

所以 $ax\leqslant\left(\frac{x^2}{125}+500+\frac{3}{2}x\right)_{\min}$,且 $x>0$,

所以 $a\leqslant\left(\frac{x}{125}+\frac{500}{x}+\frac{3}{2}\right)_{\min}$.

因为 $\frac{x}{125}+\frac{500}{x}+\frac{3}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{125}\cdot\frac{500}{x}}+\frac{3}{2}=5.5$,

当且仅当 $x=250$ 时,等号成立,

所以 $0<a\leqslant 5.5$,所以 a 的最大值为 5.5.

21.**解**:(1)由题意知,可行域 M 如图所示.

由 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

由 $\begin{cases}x=1,\\2x+y=10,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=8,\end{cases}$ 所以 $B(1,8)$.

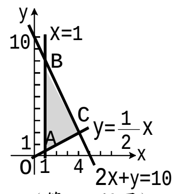
由 $\begin{cases}2x+y=10,\\y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$ 所以 $C(4,2)$.

因为 $k_{AC}=\frac{1}{2}$,$z_1=y-2x$,

所以 $y=2x+z_1$,z_1 是 y 轴的截距,$k=2>k_{AC}=\frac{1}{2}$,

所以过点 $B(1,8)$时,$(z_1)_{\max}=8-2\times 1=6$.

因为 $z_2=x^2+y^2$ 表示区域 M 上的点(x,y)到原点 $O(0,0)$距离的平方,如图,点 $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$使所求距离的平方最小,所以$(z_2)_{\min}=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.



(第 21 题图)

(2)因为 $a>0$,$y=2a\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos x$ 过区域 M 中的点,而区域中 $1\leqslant x\leqslant 4$.

又因为 $a>0$,

函数 $y=a\cos x$ 图象过点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$,$1<\frac{\pi}{2}<4$,

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$时,$y<0$,$\frac{3\pi}{2}>4$,

所以满足 $y=a\cos x$ 过区域 M 中的点,

只需图象与射线 $x=1\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$有公共点,

所以只需 $x=1$ 时,$a\cos 1\geqslant\frac{1}{2}$,

所以 $a\geqslant\frac{1}{2\cos 1}$,

所以 a 的取值范围是$\left[\frac{1}{2\cos 1},+\infty\right)$.

22.**解**:(1)因为 $f'(x)=x^2+2ax-b$,

由题意知 $f'(1)=-4$,且 $f(1)=-\frac{11}{3}$,

所以 $\begin{cases}1+2a-b=-4,\\\frac{1}{3}+a-b=-\frac{11}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=3,\end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$,$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=-1$,$x_2=3$.

当 x 变化时,$f(x)$,$f'(x)$变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

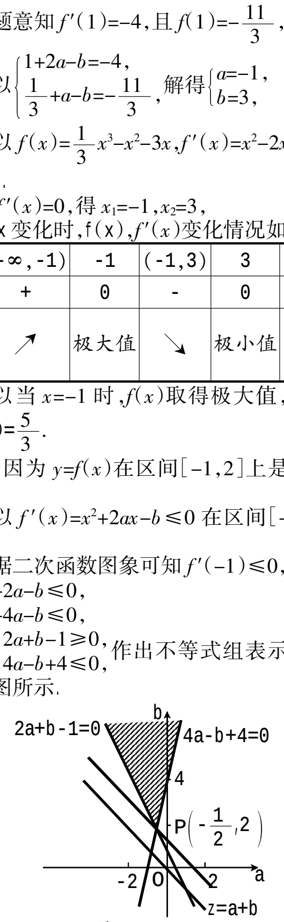
所以当 $x=-1$ 时,$f(x)$取得极大值,极大值为 $f(-1)=\frac{5}{3}$.

(2)因为 $y=f(x)$在区间$[-1,2]$上是单调减函数,

所以 $f'(x)=x^2+2ax-b\leqslant 0$ 在区间$[-1,2]$上恒成立.

根据二次函数图象可知 $f'(-1)\leqslant 0$,$f'(2)\leqslant 0$,则 $\begin{cases}1-2a-b\leqslant 0,\\4+4a-b\leqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2a+b-1\geqslant 0,\\4a-b+4\leqslant 0,\end{cases}$ 作出不等式组表示的平面区域如图所示.



(第 22 题图)

当直线 $z=a+b$ 经过交点 $P\left(-\frac{1}{2},2\right)$时,$z=a+b$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$,

所以 $z=a+b$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.