数学·高考版(理)

第9期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C　2.A　3.A　4.A　5.B　6.A

7.A　8.B　9.C　10.B　11.B

12.B

提示:设AB中点为D,则$OD\perp AB$,

因为$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{AB}|$,

所以$|2\overrightarrow{OD}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{AB}|$,

所以$|\overrightarrow{AB}|\leqslant 2\sqrt{3}|\overrightarrow{OD}|$.

因为$|\overrightarrow{OD}|^2+\frac{1}{4}|AB|^2=4$,

所以$|\overrightarrow{OD}|^2\geqslant 1$.

因为直线$x+y-k=0(k>0)$与圆$x^2+y^2=4$交于不同的两点A、B,

所以$|\overrightarrow{OD}|^2<4$,所以$4>|\overrightarrow{OD}|^2\geqslant 1$,

所以$4>\left(\frac{|-k|}{\sqrt{2}}\right)^2\geqslant 1$,

因为$k>0$,所以$\sqrt{2}\leqslant k<2\sqrt{2}$.

二、填空题

13.$x+y-1=0$或$2x+y=0$

14.$(-13,13)$

15.$xy=\frac{35}{6}$

16.$\frac{\pi}{3}$

提示:设圆C_1的半径为r_1,圆C_2的半径为r_2,点P到圆心C_1的距离为d.圆C_2的圆心坐标为$(3+\cos\theta,\sin\theta)$,圆$C_1$的圆心坐标为$(3,0)$,当$\angle MPN$取最大值时,点P到圆心$C_1$的距离最小,此时$d=\sqrt{(3+\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta}-r_2=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,又$r_1=\frac{2}{5}$,所以$\angle MPN=\frac{\pi}{3}$.

三、解答题

17.**解**:设所求圆的方程为$x^2+y^2-x-y-2+\lambda(x^2+y^2+4x-4y-8)=0$,

即$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(4\lambda-1)x+(-4\lambda-1)y-8\lambda-2=0$.

因为所求圆过点$(3,1)$,

所以有$9(\lambda+1)+(\lambda+1)+3(4\lambda-1)+(-4\lambda-1)-8\lambda-2=0$.

解得$\lambda=-\frac{2}{5}$.

所以所求圆的方程为

$\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{5}y^2-\frac{13}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{6}{5}=0$,

即$3x^2+3y^2-13x+3y+6=0$.

18.**解**:(1)设AB的中点为M,切点为N,连接OM,MN,则$|OM|+|MN|=|ON|=2$,取A关于y轴的对称点A',连接$A'B$,$|A'B|+|AB|=2(|OM|+|MN|)=4$.所以点B的轨迹是以$A'$,A为焦点,长轴长为4的椭圆.其中,$a=2,c=\sqrt{3}$,$b=1$,则曲线$\Gamma$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)因为B为CD的中点,所以$OB\perp CD$,则$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AB}$.设$B(x_0,y_0)$,则$\overrightarrow{OB}=(x_0,y_0)$,$\overrightarrow{AB}=(x_0-\sqrt{3},y_0)$,所以$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=x_0(x_0-\sqrt{3})+y_0^2=0$.又$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,解得$x_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$,$y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,则$k_{OB}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,$k_{AB}=\mp\sqrt{2}$,则直线AB的方程为$y=\pm\sqrt{2}(x-\sqrt{3})$,即$\sqrt{2}x-y-\sqrt{6}=0$或$\sqrt{2}x+y-\sqrt{6}=0$.

19.**解**:(1)依题意知直线l的斜率存在.

因为直线l过点$M(-2,0)$,

所以可设直线l的方程为$y=k(x+2)$.

因为P,Q两点在圆$x^2+y^2=1$上,

所以$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$.

因为$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$,

即$|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cdot\cos\angle POQ=-\frac{1}{2}$,

所以$\angle POQ=120°$,

所以点O到直线l的距离等于$\frac{1}{2}$,

所以$\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$,解得$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$.

所以直线l的方程为$x-\sqrt{15}y+2=0$或$x+\sqrt{15}y+2=0$.

(2)因为$\triangle OMP$与$\triangle OPQ$的面积相等,

所以$MP=PQ$,即P为MQ的中点,

所以$\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$.

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

所以$\overrightarrow{MQ}=(x_2+2,y_2)$,$\overrightarrow{MP}=(x_1+2,y_1)$.

所以$\begin{cases}x_2+2=2(x_1+2),\\y_2=2y_1,\end{cases}$

即$\begin{cases}x_2=2x_1+2,\\y_2=2y_1,\end{cases}$①

因为P,Q两点在圆$x^2+y^2=1$上,

所以$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1,\\x_2^2+y_2^2=1,\end{cases}$②

由①和②,得$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1,\\4(x_1+1)^2+4y_1^2=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-\frac{7}{8},\\y_1=\pm\frac{\sqrt{15}}{8}.\end{cases}$

故直线l的斜率$k=k_{MP}=\pm\frac{\sqrt{15}}{9}$.

20.**解**:(1)由于圆M与$\angle BOA$的两边相切,故M到OA,OB的距离相等,则M在$\angle BOA$的角平分线上,同理,N也在$\angle BOA$的角平分线上,即O,M,N三点共线,且直线ON为$\angle BOA$的角平分线,因为$M(\sqrt{3},1)$,所以M到x轴的距离为1,即圆M的半径为1,所以圆M的方程为$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$.

设圆N的半径为r,连接AM,CN,则$Rt\triangle OAM\backsim Rt\triangle OCN$,得$\frac{OM}{ON}=\frac{MA}{NC}$,即$\frac{2}{3+r}=\frac{1}{r}$,解得$r=3$,$OC=3\sqrt{3}$,所以圆N的方程为$(x-3\sqrt{3})^2+(y-3)^2=9$.

(2)由对称性可知,所求弦长转化为过点A的MN的平行线被圆N截得的弦长,$k_{MN}=\frac{3-1}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$A(\sqrt{3},0)$,所以此弦所在直线的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$,即$x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$,圆心N到该直线的距离$d=\frac{|3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故直线l被圆N截得的弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{33}$.

21.**解**:(1)设$P(x,y)$,则$k_{MP}\cdot k_{NP}=\frac{y}{x+\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{x-\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}(x\neq\pm\sqrt{2})$,

整理,得$\frac{x^2}{2}+y^2=1(x\neq\pm\sqrt{2})$.

(2)因为圆O与直线l相切,

所以$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,即$m^2=k^2+1$.

当直线l过M或N点时,

有$\pm\sqrt{2}k+m=0$,

由$\begin{cases}\pm\sqrt{2}k+m=0,\\m^2=k^2+1,\end{cases}$解得$k^2=1$,

因为直线l与点P的轨迹交于不同的两点A,B,且M,N不在点P的轨迹上,所以$k^2\neq 1$.①

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=kx+m,\end{cases}$消去y,

得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2-4\times\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}$,

将$m^2=k^2+1$代入上式,得

$|AB|=2\sqrt{\frac{2(k^4+k^2)}{4(k^4+k^2)+1}}$.

又$|AB|\in\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{4}{3}\right)$,

得$\begin{cases}\frac{8(k^4+k^2)}{4(k^4+k^2)+1}<\frac{16}{9},\\\frac{8(k^4+k^2)}{4(k^4+k^2)+1}\geqslant\frac{3}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(k^2+2)(k^2-1)<0,\\(2k^2-1)(2k^2+3)\geqslant 0\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant k^2<1$.②

由①和②,得$\frac{1}{2}\leqslant k^2<1$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)\cdot(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}+km\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+m^2$,

将$m^2=k^2+1$代入,得

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1+k^2}{1+2k^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+2k^2}\right)$,

因为$\frac{1}{2}\leqslant k^2<1$,

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\in\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$.

22.**解**:(1)由题意,设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由已知可得$2a=4$,$a=2c$,解得$a=2$,$c=1$,所以$b^2=a^2-c^2=3$.

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.所以圆的圆心为$(1,0)$,半径为$\frac{1}{2}a=1$,所以圆的标准方程为$(x-1)^2+y^2=1$.

(2)设$P(x,y)$,则$M(4,y)$,$F(1,0)$,

其中$-2\leqslant x\leqslant 2$,

因为$P(x,y)$在椭圆上,

所以$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,所以$y^2=3-\frac{3}{4}x^2$.

所以$|PF|^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+3-\frac{3}{4}x^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$,$|PM|^2=|x-4|^2$,$|FM|^2=3^2+y^2=12-\frac{3}{4}x^2$.

①若$|PF|=|FM|$,则$\frac{1}{4}(x-4)^2=12-\frac{3}{4}x^2$,

解得$x=-2$,或$x=4$(舍去),当$x=-2$时,$P(-2,0)$,此时P、F、M三点共线,不合题意,所以$|PF|\neq|FM|$;

②若$|PM|=|PF|$,则$(x-4)^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$,

解得$x=4$,不合题意;

③若$|PM|=|FM|$,则$(x-4)^2=12-\frac{3}{4}x^2$,

解得$x=4$(舍去),或$x=\frac{4}{7}$,

当$x=\frac{4}{7}$时,$y=\pm\frac{3\sqrt{15}}{7}$,

所以$P\left(\frac{4}{7},\pm\frac{3\sqrt{15}}{7}\right)$,满足题意.

综上可得,存在点$P\left(\frac{4}{7},\frac{3\sqrt{15}}{7}\right)$或$\left(\frac{4}{7},-\frac{3\sqrt{15}}{7}\right)$,使得$\triangle FPM$为等腰三角形.

数学·高考版(理)

第 10 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.A　4.C　5.D　6.B
7.D　8.B　9.D　10.D　11.B
12.A

提示:设椭圆左焦点为 N,则连接 AN,BN,因为 $AF\perp BF$,且 A 与 B 关于原点对称,所以四边形 $AFBN$ 为矩形.

根据椭圆的定义,得 $|AF|+|AN|=2a$,因为 $\angle ABF=\alpha$,所以 $\angle ANF=\alpha$.

所以 $2a=2c\cos\alpha+2c\sin\alpha$.

所以 $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

又 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$,

所以 $\dfrac{5\pi}{12}\leqslant\alpha+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

则 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}\leqslant\sqrt{3}-1$,

即椭圆离心率 e 的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$.

故选 A.

二、填空题

13.$4\sqrt{2}$　14.6　15.$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1(y\neq0)$

16.$\dfrac{23}{3}$

提示:设 $M(x,y)$.因为 $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KN}=0$,所以 $\overrightarrow{KM}\perp\overrightarrow{KN}$,则由向量数量积的几何意义可知,$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{NM}=|\overrightarrow{KM}||\overrightarrow{NM}|\cdot\cos\angle NMK=\overrightarrow{KM}^2=(x-2)^2+y^2$.又因为点 M 在椭圆上,则 $y^2=9-\dfrac{x^2}{4}$,所以 $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{NM}=\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+\dfrac{23}{3}$,所以当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时,$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{NM}$ 取得最小值 $\dfrac{23}{3}$.

三、解答题

17.**解:**(1)$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$.　①

矩形 $ABCD$ 的面积为 $32\sqrt{3}$,

即 $2a\cdot2b=32\sqrt{3}$.　②

由①②解得 $a=4,b=2\sqrt{3}$,

所以椭圆 M 的标准方程是 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

(2)易知过点 N 的直线斜率不存在时,不满足题意.

设直线的方程为 $y-0=k(x-1)$,即 $y=kx-k$.

由 $\begin{cases}y=kx-k,\\3x^2+4y^2=48\end{cases}$ 消去 y,

得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-48=0$.

设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{4k^2-48}{3+4k^2}$.

又 $\overrightarrow{NE}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{NF}=(x_2-1,y_2)$,

所以 $\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{NF}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2$
$=(x_1-1)(x_2-1)+k(x_1-1)\cdot k(x_2-1)$
$=(1+k^2)(x_1-1)(x_2-1)$
$=(1+k^2)[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=\dfrac{-45(1+k^2)}{3+4k^2}$,

所以 $-\dfrac{27}{2}\leqslant\dfrac{-45(1+k^2)}{3+4k^2}\leqslant-12$,

解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant k^2\leqslant3$.

所以该直线斜率 $k\in\left[-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right]$.

18.(1)**解:**由题意知 $c=1,b=\sqrt{3}$,则 $a^2=b^2+c^2=4$,所以椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,椭圆 M 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

(2)**证明:**设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1)$,

则 $B(-x_0,-y_0)$,$C\left(x_0,\dfrac{y_0}{2}\right)$.

由点 A,P 在椭圆上,

所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$,　①

$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$.　②

点 A 不是椭圆 M 的顶点,②-①,得 $\dfrac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=-\dfrac{3}{4}$.

又 $k_{PB}=\dfrac{y_1+y_0}{x_1+x_0}$,$k_{BC}=\dfrac{\frac{3}{2}y_0}{2x_0}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$,

且点 B,C,P 三点共线,

所以 $\dfrac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$,即 $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{4(y_1+y_0)}{3(x_1+x_0)}$.

所以 $k_{AB}\cdot k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0}\cdot\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{4(y_1+y_0)}{3(x_1+x_0)}\cdot\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{4(y_1^2-y_0^2)}{3(x_1^2-x_0^2)}=\dfrac{4}{3}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$,

所以 $AB\perp AP$.

19.**解:**(1)由题意知,$\dfrac{|MF_2|}{2c}=\dfrac{3}{4}$,所以 $|MF_2|=\dfrac{3}{2}c$.因为 $|MF_1|^2=|MF_2|^2+|F_1F_2|^2=\dfrac{9}{4}c^2+4c^2$,所以 $|MF_1|=\dfrac{5}{2}c$.由椭圆定义,可得 $|MF_1|+|MF_2|=\dfrac{5}{2}c+\dfrac{3}{2}c=2a$,所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$,所以椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

(2)由题意知,原点 O 为 F_1F_2 的中点,$MF_2/\!/y$ 轴,所以直线 MF_1 与 y 轴的交点 $D(0,2)$ 是线段 MF_1 的中点,

又 $M\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$,所以 $\dfrac{b^2}{a}=4$,即 $b^2=4a$.

由 $|MN|=5|F_1N|$,得 $|DF_1|=2|F_1N|$.

设 $N(x_1,y_1)$,由题意知,$y_1<0$,

则 $\begin{cases}2(-c-x_1)=c,\\-2y_1=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2}c,\\y_1=-1,\end{cases}$

代入 C 的方程,得 $\dfrac{9c^2}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$,

将 $b^2=4a$ 及 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 代入 $\dfrac{9c^2}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$,

得 $\dfrac{9(a^2-4a)}{4a^2}+\dfrac{1}{4a}=1$,

解得 $a=7$,或 $a=0$(舍去),

当 $a=7$ 时,$b^2=28$,所以 $b=2\sqrt{7}$.

20.(1)**解:**因为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 满足 $a^2=b^2+c^2$,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,$\dfrac{1}{2}\times b\times2c=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$,

解得 $a^2=5,b^2=\dfrac{5}{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{\frac{5}{3}}=1$.

(2)①**解:**将 $y=k(x+1)$ 代入 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{\frac{5}{3}}=1$ 中,得 $(1+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-5=0$,$\Delta=36k^4-4(3k^2+1)\cdot(3k^2-5)=48k^2+20>0$,$x_1+x_2=-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}$.

因为 AB 中点的横坐标为 $-\dfrac{1}{2}$,

所以 $-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}=-1$,解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

②**证明:**由①知 $x_1+x_2=-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{3k^2-5}{3k^2+1}$,又 $M\left(-\dfrac{7}{3},0\right)$,

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(x_1+\dfrac{7}{3},y_1\right)\cdot\left(x_2+\dfrac{7}{3},y_2\right)$

$=\left(x_1+\dfrac{7}{3}\right)\left(x_2+\dfrac{7}{3}\right)+y_1y_2$

$=\left(x_1+\dfrac{7}{3}\right)\left(x_2+\dfrac{7}{3}\right)+k^2(x_1+1)(x_2+1)$

$=(1+k^2)x_1x_2+\left(\dfrac{7}{3}+k^2\right)(x_1+x_2)+\dfrac{49}{9}+k^2$

$=(1+k^2)\cdot\dfrac{3k^2-5}{3k^2+1}+\left(\dfrac{7}{3}+k^2\right)\left(-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}\right)+\dfrac{49}{9}+k^2$

$=\dfrac{-3k^4-16k^2-5}{3k^2+1}+\dfrac{49}{9}+k^2=\dfrac{4}{9}$.

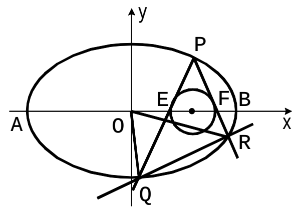
所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 为定值 $\dfrac{4}{9}$.

21.**解:**(1)设点 $M(x,y)$,

因为 $k_{AM}k_{BM}=-\dfrac{3}{4}$,所以 $\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{3}{4}$,

整理,得点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$.

(2)如图,由题意可得点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$,



(第 21 题图)

因为圆 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 的圆心为 $(1,0)$,所以直线 PE 与直线 PF 的斜率存在,且互为相反数.

设直线 PE 的方程为 $y=k(x-1)+\dfrac{3}{2}$,与椭圆方程联立消去 y,得 $(4k^2+3)x^2+(12k-8k^2)x+(4k^2-12k-3)=0$,由于 $x=1$ 是方程的一个解,所以方程的另一解为 $x_Q=\dfrac{4k^2-12k-3}{4k^2+3}$,

同理,$x_R=\dfrac{4k^2+12k-3}{4k^2+3}$.

故直线 RQ 的斜率为 $k_{RQ}=\dfrac{y_R-y_Q}{x_R-x_Q}$

$=\dfrac{-k(x_R-1)+\frac{3}{2}-k(x_Q-1)-\frac{3}{2}}{x_R-x_Q}$

$=\dfrac{-k\left(\frac{8k^2-6}{4k^2+3}-2\right)}{\frac{24k}{4k^2+3}}=\dfrac{1}{2}$.

把直线 RQ 的方程 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 代入椭圆方程,消去 y 整理,得 $x^2+bx+b^2-3=0$,所以 $|RQ|=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{b^2-4(b^2-3)}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4-b^2}$,原点 O 到直线 RQ 的距离为 $d=\dfrac{|2b|}{\sqrt{5}}$,所以 $S_{\triangle ORQ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4-b^2}\cdot\dfrac{|2b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{b^2(4-b^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{b^2+(4-b^2)}{2}=\sqrt{3}$.当且仅当 $b^2=2,b=-\sqrt{2}$ 时,等号成立.所以 $\triangle OQR$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

22.(1)**解:**依题意 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,设 C_1:$\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,$C_2$:$\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$,由对称性,四个焦点构成的四边形为菱形,且面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2b\times2\sqrt{2}b=2\sqrt{2}$,解得 $b^2=1$,所以椭圆 C_1:$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$,C_2:$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)①**证明:**设 $P(x_0,y_0)$,

则 $\dfrac{x_0^2}{2}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$,$A(-\sqrt{2},0)$,$B(\sqrt{2},0)$,

$k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}$,$k_{PB}=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}$,

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}=\dfrac{4-2x_0^2}{x_0^2-2}=-2$,

所以直线 PA,PB 斜率之积为常数 -2.

②**解:**设 $E(x_1,y_1)$,则 $\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$,

$k_{EA}=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}$,$k_{EB}=\dfrac{y_1}{x_1-\sqrt{2}}$,

所以 $k_{EA}\cdot k_{EB}=\dfrac{y_1^2}{x_1^2-2}=\dfrac{1-\frac{1}{2}x_1^2}{x_1^2-2}=-\dfrac{1}{2}$,

同理,$k_{FA}\cdot k_{FB}=-\dfrac{1}{2}$.

所以 $k_{EA}\cdot k_{EB}\cdot k_{FA}\cdot k_{FB}=\dfrac{1}{4}$,

由 $k_{EA}=k_{PA}$,$k_{FB}=k_{PB}$,结合①得 $k_{FA}\cdot k_{EB}=-\dfrac{1}{8}$.

所以直线 AF 与直线 BE 的斜率之积为常数 $-\dfrac{1}{8}$.

数学·高考版(理)
第11期
第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.A 3.C 4.D 5.A 6.D
7.B 8.C 9.B 10.A 11.A
12.C

提示：记 AF_1，AF_2 与 $\triangle APF_1$ 的内切圆相切于点 N，M，则 $|AN|=|AM|$，$|PM|=|PQ|$，$|NF_1|=|QF_1|$，$|AF_1|=|AF_2|$.

所以 $|NF_1|=|AF_1|-|AN|=|AF_2|-|AM|=|MF_2|$.

所以 $|QF_1|=|MF_2|$.

所以 $|PF_1|-|PF_2|=(|QF_1|+|PQ|)-(|MF_2|-|PM|)=|QF_1|+|PQ|-|MF_2|+|PM|=|PQ|+|PM|=2|PQ|=4$，

即 $2a=4$，则 $a=2$.

由 $|F_1F_2|=8=2c$，得 $c=4$，

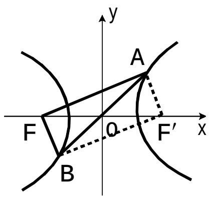
所以 $e=\frac{c}{a}=2$. 故选 C.

二、填空题

13. $2\sqrt{2}$ 14. $3+2\sqrt{2}$ 15. 2

16. $\frac{x^2}{2}-y^2=1$

提示：如图所示，设双曲线的右焦点为 $F'(\sqrt{3},0)$，连接 $F'A$，$F'B$，由双曲线的对称性和 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，知四边形 $AFBF'$ 为矩形，由 $|FA|+|FB|=4$，得 $|FA|+|AF'|=4$，又因为 $|FA|-|AF'|=2a$，所以 $|FA|=2+a$，$|F'A|=2-a$，由 $|F'A|^2+|FA|^2=(2-a)^2+(2+a)^2=(2\sqrt{3})^2$，得 $a^2=2$，$b^2=1$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.



（第16题图）

三、解答题

17. **解**：因为 $e=\sqrt{3}$，所以 $b^2=2a^2$，

所以双曲线方程可化为 $2x^2-y^2=2a^2$.

设直线 l 的方程为 $y=x+m$.

由 $\begin{cases}y=x+m,\\2x^2-y^2=2a^2,\end{cases}$ 得 $x^2-2mx-m^2-2a^2=0$，

所以 $\Delta=4m^2+4(m^2+2a^2)>0$，

所以直线 l 一定与双曲线相交.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=2m$，$x_1x_2=-m^2-2a^2$.

设 $R(0,y_R)$，因为 $\overrightarrow{PR}=3\overrightarrow{RQ}$，

所以 $(0-x_1,y_R-y_1)=3(x_2-0,y_2-y_R)$，

所以 $x_1=-3x_2$，

所以 $x_2=-m$，$-3x_2^2=-m^2-2a^2$.

消去 x_2，得 $m^2=a^2$.

又 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+m)(x_2+m)=2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=m^2-4a^2=-3$，

所以 $m=\pm1$，$a^2=1$，$b^2=2$.

所以直线 l 的方程为 $y=x\pm1$，

双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

18. **解**：(1)由已知 $2=\frac{3}{2}+\frac{p}{2}$，解得 $p=1$.

(2)由(1)，知 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，显然直线 AB 的斜率 k 存在且 $k\neq0$，

设直线 AB：$y=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 联立 $y^2=2x$，得 $k^2x^2-(2+k^2)x+\frac{k^2}{4}=0(k\neq0)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{2+k^2}{k^2}$，$k\in R$，$k\neq0$，

则 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}=x_1+x_2+1=\frac{2+k^2}{k^2}+1=2+\frac{2}{k^2}$.

因为 $CD\perp AB$，所以 $|CD|=2+2k^2$，

所以 $|AB|+|CD|=4+\frac{2}{k^2}+2k^2\geqslant4+2\times\sqrt{2\times2}=8$，

当且仅当 $\frac{2}{k^2}=2k^2$，即 $k=\pm1$ 时，$|AB|+|CD|$ 取得最小值 8.

19. **解**：(1)由题意，点 C 到定点 $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$ 和直线 $x=\frac{1}{4}$ 的距离相等，故点 C 的轨迹 E 的方程为 $y^2=-x$.

(2)由方程组 $\begin{cases}y^2=-x,\\y=k(x+1),\end{cases}$ 消去 x，整理，得 $ky^2+y-k=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{1}{k}$，$y_1y_2=-1$.

设直线 l 与 x 轴交于点 N，

则 $N(-1,0)$.

所以 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAN}+S_{\triangle OBN}=\frac{1}{2}|ON|\cdot|y_1|+\frac{1}{2}|ON||y_2|=\frac{1}{2}|ON||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2+4}$.

因为 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{10}$，

所以 $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2+4}=\sqrt{10}$，

解得 $k=\pm\frac{1}{6}$.

20. **解**：(1)设 $\angle CAx=\alpha$，则由 $\tan\angle BAC=\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$ 及 α 为锐角，得 $\tan\alpha=2$. 所以 AC 所在直线的方程为 $y=2x$，AB 所在直线的方程为 $y=-2x$.

(2)设所求双曲线的方程为 $4x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$，$C(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1>0,x_2>0)$，$D(x_0,y_0)$. 由 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，得 $(x_0-x_1,y_0-y_1)=2(x_2-x_0,y_2-y_0)$，所以 $x_0=\frac{x_1+2x_2}{3}$，$y_0=\frac{y_1+2y_2}{3}=\frac{2x_1-4x_2}{3}$.

因为点 D 在双曲线上，

所以 $4\left(\frac{x_1+2x_2}{3}\right)^2-\left(\frac{2x_1-4x_2}{3}\right)^2=\lambda$，

所以 $\frac{32}{9}x_1x_2=\lambda$. ①

由 $\tan\angle BAC=-\frac{4}{3}$，得 $\sin\angle BAC=\frac{4}{5}$.

因为 $|AB|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{5}x_2$，

$|AC|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{5}x_1$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times5x_1x_2\times\frac{4}{5}=2x_1x_2=9$，

代入①，得 $\lambda=16$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(3)由题意知 $\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\rangle=\pi-\angle BAC$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\rangle=-\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$.

因为 $D(x_0,y_0)$ 在双曲线上，

所以 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{16}=1$.

又因为点 D 到 AB，AC 所在直线的距离分别为 $|\overrightarrow{DF}|=\frac{|2x_0+y_0|}{\sqrt{5}}$，$|\overrightarrow{DE}|=\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$，

所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DF}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\rangle=\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}\cdot\frac{|2x_0+y_0|}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{5}=\frac{48}{25}$.

21. (1)**解**：设直线 AM 的方程为 $x=my+p$，代入 $y^2=2px$，得 $y^2-2mpy-2p^2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，

则 $y_1y_2=-2p^2=-8$，得 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)**证明**：设 $B(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$.

由(1)可知，$y_3y_4=-2p^2$.

因为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，所以设直线 AB 的方程为 $x=ty+\frac{p}{2}$，代入 $y^2=2px$，得 $y^2-2pty-p^2=0$，所以 $y_1y_3=-p^2$.

又直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{2p}{y_1+y_3}$，

直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}=\frac{2p}{y_2+y_4}$，所以

$\frac{k_{AB}}{k_{MN}}=\frac{y_2+y_4}{y_1+y_3}=\frac{\frac{-2p^2}{y_1}+\frac{-2p^2}{y_3}}{y_1+y_3}=\frac{\frac{-2p^2}{y_1y_3}(y_1+y_3)}{y_1+y_3}=2$.

故直线 AB 与直线 MN 斜率之比为定值 2.

22. (1)**证明**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 中，得 $2x^2-kx-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$.

因为 $x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$，

所以点 N 的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$.

因为 $(2x^2)'=4x$，所以 $(2x^2)'\big|_{x=\frac{k}{4}}=k$，

即抛物线在点 N 处的切线的斜率为 k.

因为直线 l：$y=kx+2$ 的斜率为 k，

所以切线平行于 AB.

(2)**解**：假设存在实数 k，使以 AB 为直径的圆 M 经过点 N.

因为 M 是 AB 的中点，

所以 $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$.

由(1)知 $y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\frac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2}+4\right)=\frac{k^2}{4}+2$. 因为 $MN\perp x$ 轴，所以 $|MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$.

因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-4\times(-1)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$，

所以 $\frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$，

所以 $k=\pm2$. 所以存在实数 $k=\pm2$，使以 AB 为直径的圆 M 经过点 N.

数学·高考版(理)

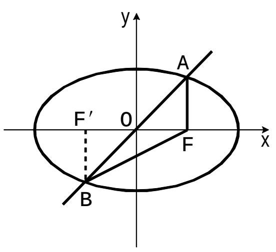
第 12 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.A 4.B 5.C 6.C
7.C 8.D 9.A 10.B 11.C
12.A

提示:如图,取椭圆左焦点为 F′,连接 BF′,由椭圆的对称性知|AF|=|BF′|,由于|AF|+|BF|=4,所以|BF′|+|BF|=2a=4,即 a=2.不妨设 M(0,b),由题意得点 M 到直线 l 的距离 $\frac{|0-4b|}{5}\geqslant\frac{4}{5}$,可得 b≥1,则椭圆 E 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 e∈(0,1),所以 $e\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,故选 A.



(第 12 题图)

二、填空题

13.2 14.$\pm2\sqrt{2}$ 15.$\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$

16.$x^2+y^2=4$

提示:由题意,延长 F_1D,F_2A 并交于点 B,易证 Rt△ABD≌Rt△AF_1D,所以$|F_1D|=|BD|$,$|F_1A|=|AB|$,又 O 为 F_1F_2 的中点,连接 DO,所以 OD∥F_2B,从而可知$|DO|=\frac{1}{2}|F_2B|=\frac{1}{2}(|AF_1|+|AF_2|)=2$.设点D的坐标为(x,y),则$x^2+y^2=4$,所以点D的轨迹方程为$x^2+y^2=4$.

三、解答题

17.**解**:由题意,设中心在坐标原点,焦点在x轴上的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.因为离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$a=2b$,所以椭圆的方程可化为$x^2+4y^2=4b^2$.设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由于点$M$、$N$都在直线$x+y-1=0$上, 因此$y_1=1-x_1$,$y_2=1-x_2$,$y_1y_2=(1-x_1)\cdot(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2$.因为以$MN$为直径的圆经过坐标原点, 所以$OM\perp ON$, 所以$x_1x_2+y_1y_2=0$,即$1-(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$.将直线$x+y-1=0$与椭圆的方程$x^2+4y^2=4b^2$联立消去$y$,得$5x^2-8x+4-4b^2=0$. 因为$M$、$N$是直线与椭圆的交点, 所以$x_1+x_2=\frac{8}{5}$,$x_1x_2=\frac{4-4b^2}{5}$,代入$1-(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$,得$1-\frac{8}{5}+2\times\frac{4-4b^2}{5}=0$,解得$b^2=\frac{5}{8}$,所以$a^2=\frac{5}{2}$,所以所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{\frac{5}{2}}+\frac{y^2}{\frac{5}{8}}=1$,即$\frac{2x^2}{5}+\frac{8y^2}{5}=1$.

18.**解**:(1)设 M(x,y)到直线 x=4 的距离为 d,根据题意 d=2|MN|,所以$|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,化简,得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,所以动点 M 的轨迹为椭圆,其方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意,易知直线 m 的斜率存在,且不为 0,设直线 m 的方程为 y=kx+3,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.因为 A 是 PB 的中点,

所以 $x_1=\frac{x_2}{2}$, ①

$y_1=\frac{3+y_2}{2}$, ②

$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$, ③

$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$, ④

联立①②③④,解得$\begin{cases}x_2=2,\\y_2=0,\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=0.\end{cases}$

即点 B 的坐标为(2,0),或(-2,0),所以直线 m 的斜率为$-\frac{3}{2}$或$\frac{3}{2}$.

19.(1)**解**:抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$的焦点为$\left(\frac{p}{2},0\right)$.由点$\left(\frac{p}{2},0\right)$在直线 l:x-y-2=0 上,得$\frac{p}{2}-0-2=0$,即 p=4,所以抛物线 C 的方程为$y^2=8x$.

(2)设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,线段 PQ 的中点 $M(x_0,y_0)$.因为点 P 和 Q 关于直线 l 对称,所以直线 l 垂直平分线段 PQ, 于是直线 PQ 的斜率为-1,则可设其方程为 y=-x+b.

①**证明**:由$\begin{cases}y^2=2px,\\y=-x+b,\end{cases}$消去 x,得 $y^2+2py-2pb=0$.(*)

因为 P 和 Q 是抛物线 C 上的相异两点,所以 $y_1\neq y_2$,从而$\Delta=(2p)^2-4(-2pb)>0$,化简,得 p+2b>0.又 $y_1+y_2=-2p$,所以 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-p$.

因为 $M(x_0,y_0)$在直线 l 上,所以 $x_0=2-p$,因此,线段 PQ 的中点坐标为(2-p,-p).

②**解**:因为 M(2-p,-p)在直线 y=-x+b 上,所以-p=-(2-p)+b,即 b=2-2p.由①知 p+2b>0,于是 p+2(2-2p)>0,所以 $p<\frac{4}{3}$.因此,p 的取值范围为$\left(0,\frac{4}{3}\right)$.

20.**解**:(1)由$x^2+5y^2=5$,可得$\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

所以c=2.所以F(2,0),A(0,1).

由椭圆的对称性,

可知满足|OB|=|OC|的直线l有两种:

①当直线l⊥x轴时,令x=2,得$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 B、C 两点的坐标分别为$\left(2,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$和$\left(2,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

②当直线l与x轴重合时,B、C两点的坐标分别为($\sqrt{5}$,0)和(-$\sqrt{5}$,0).

(2)①易知,当直线l与x轴重合时,|AB|=|AC|,此时直线l的方程为y=0.

②当直线l与x轴垂直时,直线l不符合题意.

③当直线l与坐标轴不垂直时, 设过点F的直线的斜率为k,直线l与椭圆M的交点$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$,BC的中点$N(x_0,y_0)$,则l:y=k(x-2).

联立$\begin{cases}y=k(x-2),\\x^2+5y^2=5,\end{cases}$得

$(1+5k^2)x^2-20k^2x+20k^2-5=0$,

所以$x_1+x_2=\frac{20k^2}{1+5k^2}$.

所以 $x_0=\frac{10k^2}{1+5k^2}$,$y_0=\frac{-2k}{1+5k^2}$.

要使|AB|=|AC|,只要AN⊥BC,

所以$\frac{y_0-1}{x_0}\cdot k=-1$,所以$5k^2-8k+1=0$,

所以$k=\frac{4\pm\sqrt{11}}{5}$.

所以直线l的方程为$y=\frac{4\pm\sqrt{11}}{5}(x-2)$.

综上,符合题意的直线l的方程为y=0或$y=\frac{4\pm\sqrt{11}}{5}(x-2)$.

21.**解**:(1)由 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$,且$|PF_1|$,$|F_1F_2|$,$|PF_2|$成等差数列,得$|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4>|F_1F_2|$,根据椭圆定义,知 P 的轨迹为以 F_1、F_2 为焦点的椭圆, 其长轴 2a=4, 焦距 2c=2,短半轴 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,故 C_1 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)过点 A(-2,0)与 x 轴垂直的直线不与圆 C_2 相切,故可设 l:y=k(x+2),由直线 l 与曲线 C_2 相切,得$\frac{|k(t+2)|}{\sqrt{k^2+1}}=t(t+2)$,化简,得 $t=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$,$t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 由 $0<\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $0<k^2\leqslant1$.联立$\begin{cases}y=k(x+2),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去 y,得$(4k^2+3)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$,直线 l 被曲线 C_1 截得的线段一端点为 A(-2,0),设另一端点为 B,解方程可得 $B\left(\frac{-2(4k^2-3)}{4k^2+3},\frac{12k}{4k^2+3}\right)$,有

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{-2(4k^2-3)}{4k^2+3}+2\right)^2+\left(\frac{12k}{4k^2+3}\right)^2}$$

$$=\frac{12\sqrt{k^2+1}}{4k^2+3}.$$

令$\sqrt{k^2+1}=n$, 则$|AB|=\frac{12n}{4n^2-1}=\frac{12}{4n-\frac{1}{n}}$,$n\in(1,\sqrt{2}]$.考查函数 $y=4n-\frac{1}{n}$的性质,知 $y=4n-\frac{1}{n}$在区间$(1,\sqrt{2}]$上是增函数,所以 $n=\sqrt{2}$时,$y=4n-\frac{1}{n}$取最大值$\frac{7\sqrt{2}}{2}$,从而$|AB|_{\min}=\frac{12}{\frac{7\sqrt{2}}{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$. 所以直线 l 被曲线 C_1 截得的线段长的最小值为$\frac{12\sqrt{2}}{7}$.

22.(1)**解**:因为椭圆的焦点在 y 轴上,故设椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由已知得$b=1$,$c=1$,所以 $a=\sqrt{2}$,所以椭圆的方程为$\frac{y^2}{2}+x^2=1$.当直线 l 的斜率不存在时,$|CD|=2\sqrt{2}$,与题意不符;当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\\frac{y^2}{2}+x^2=1,\end{cases}$化简得$(k^2+2)x^2+2kx-1=0$,

则 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+2}$,$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{k^2+2}$.

所以$|CD|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{2k}{k^2+2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{k^2+2}}=\frac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{k^2+2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$,

解得 $k=\pm\sqrt{2}$.所以直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x+1$ 或 $y=-\sqrt{2}x+1$.

(2)**证明**:当直线 l 的斜率不存在时,与题意不符.当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+1(k\neq0,k\neq\pm1)$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则点 P 的坐标为$\left(-\frac{1}{k},0\right)$.

由(1)知 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+2}$,$x_1x_2=-\frac{1}{k^2+2}$,

且直线 AC 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$,

直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$,

将两直线方程联立,消去 y,

得$\frac{x+1}{x-1}=\frac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}$.

因为$-1<x_1<1$,$-1<x_2<1$,

所以$\frac{x+1}{x-1}$与$\frac{y_2}{y_1}$异号,

且$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=\frac{y_2^2(x_1+1)^2}{y_1^2(x_2-1)^2}=\frac{2-2x_2^2}{2-2x_1^2}\cdot\frac{(x_1+1)^2}{(x_2-1)^2}=\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{1-\frac{2k}{k^2+2}-\frac{1}{k^2+2}}{1+\frac{2k}{k^2+2}-\frac{1}{k^2+2}}=\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2$.

又 $y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=k^2\left(-\frac{1}{k^2+2}\right)+k\cdot\left(-\frac{2k}{k^2+2}\right)+1=-\frac{2(1+k)^2(k-1)}{(k^2+2)(k+1)}$,

所以$\frac{k-1}{k+1}$与 y_1y_2 异号,

所以$\frac{x+1}{x-1}$与$\frac{k-1}{k+1}$同号,

所以$\frac{x+1}{x-1}=\frac{k-1}{k+1}$,解得 $x=-k$,故点 Q 坐标为$(-k,y_0)$,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{1}{k},0\right)\cdot(-k,y_0)=1$,

故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.