数学·高考版(理)

第17期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.D 4.B 5.B 6.C 7.B 8.D 9.B 10.D 11.C 12.C

提示：对于①，$\ln(f(a_n))=\ln\frac{1}{a_n}=-\ln a_n=-\ln(a_1q^{n-1})=-\ln a_1-(n-1)\ln q$ 为等差数列，故①是“保比差数列函数”，B，D均错；对于④，$\ln(f(a_n))=\ln\sqrt{a_n}=\frac{1}{2}\ln(a_1q^{n-1})=\frac{1}{2}\ln a_1+\frac{1}{2}(n-1)\ln q$ 为等差数列，故④是“保比差数列函数”，A错.故选C.

二、填空题

13.10 14.50 15.200

16.$\frac{1}{4}$

提示：令 $m=1$，则 $a_{n+1}=a_1a_n=\frac{1}{5}a_n$，

所以$\{a_n\}$是公比与首项都为$\frac{1}{5}$的等比数列，

所以 $S_n=\frac{\frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{4}$.

对任意正整数 n，$S_n<\frac{1}{4}$恒成立，

所以$\frac{1}{4}\leqslant a$，即 a 的最小值为$\frac{1}{4}$.

三、解答题

17.解：(1)因为 $a_1,a_2,a_3-\frac{1}{8}$ 成等差数列，

所以 $2a_2=a_1+a_3-\frac{1}{8}$.

又 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $4q^2-8q+3=0$，

解得 $q=\frac{1}{2}$，或 $q=\frac{3}{2}$.

因为 $q\in(0,1)$，

所以 $q=\frac{1}{2}$，所以 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$.

(2)根据题意，得 $b_n=na_n=\frac{n}{2^n}$，

$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$， ①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$， ②

由①-②，得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，所以 $S_n=2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

18.解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

由 $2a_1,\frac{1}{2},3a_2$ 成等差数列，

可得 $2a_1+3a_2=1$，

即 $2a_1+3a_1q=1$. ①

由 $a_2,\frac{1}{3}a_3,a_6$ 成等比数列，

可得 $a_2a_6=\frac{1}{9}a_3^2$，

即 $a_1q\cdot a_1q^5=\frac{1}{9}a_1^2q^4$. ②

由①②解得 $a_1=q=\frac{1}{3}$，则 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2)$b_n=\log_3\frac{1}{a_n}=\log_3 3^n=n$，

$\frac{1}{b_{n-1}b_n}=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

则 $S_n=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}b_n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$.

19.(1)解：在数列$\{a_n\}$中，

因为 $a_1=\frac{1}{4}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}$，

所以数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{4}$，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，

所以 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)证明：$b_n+2=3\log_{\frac{1}{4}}a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，

所以 $b_n=3\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^n-2=3n-2$.

所以 $b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=3$，

所以数列$\{b_n\}$是首项 $b_1=1$，公差 $d=3$ 的等差数列.

(3)解：由(1)(2)知 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，$b_n=3n-2$，

所以 $c_n=a_n+b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+3n-2$，

所以 $S_n=1+\frac{1}{4}+4+\left(\frac{1}{4}\right)^2+7+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(3n-5)+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(3n-2)+\left(\frac{1}{4}\right)^n=[1+4+7+\cdots+(3n-5)+(3n-2)]+\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\frac{n(1+3n-2)}{2}+\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3n^2-n}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

20.解：(1)由 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=3^{\frac{n^2+n}{2}}$，

则 $T_{n-1}=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}=3^{\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}}(n\geqslant 2)$，

所以 $a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=3^n(n\geqslant 2)$.

又 $a_1=T_1=3$，满足上式.

所以 $a_n=3^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)因为 $b_1+b_2+b_3=15$，$b_1+b_3=2b_2$，

所以 $b_2=5$.

依题意$\left(\frac{a_2}{3}+b_2\right)^2=\left(\frac{a_1}{3}+b_1\right)\left(\frac{a_3}{3}+b_3\right)$，

而$\frac{a_1}{3}=1$，$\frac{a_2}{3}=3$，$\frac{a_3}{3}=9$，

设 $b_1=5-d$，$b_2=5$，$b_3=5+d$，

所以 $64=(5-d+1)(5+d+9)$，

所以 $d^2+8d-20=0$，

得 $d=2$，或 $d=-10$(舍去)，

所以 $b_n=b_1+(n-1)d=3+(n-1)\times 2=2n+1$.

所以 $a_nb_n=(2n+1)\cdot 3^n$.

所以 $S_n=3\times 3+5\times 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}+(2n+1)\cdot 3^n$，

$3S_n=3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n+(2n+1)\cdot 3^{n+1}$，

两式相减，得

$-2S_n=3\times 3+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^n-(2n+1)\cdot 3^{n+1}$，

$-2S_n=9+2\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n+1)\cdot 3^{n+1}$

$=-2n\cdot 3^{n+1}$，

所以 $S_n=n\cdot 3^{n+1}$.

21.解：(1)由 $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}_+)$，$\lambda>0$，可得 $\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n+1}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n+1$，

所以$\left\{\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\right\}$为等差数列，

其首项为0，公差为1，故$\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n=n-1$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(n-1)\lambda^n+2^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)设 $T_n=\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4+\cdots+(n-2)\lambda^{n-1}+(n-1)\lambda^n$. ①

$\lambda T_n=\lambda^3+2\lambda^4+3\lambda^5+\cdots+(n-2)\lambda^n+(n-1)\lambda^{n+1}$， ②

当 $\lambda\neq 1$ 时，由①-②，得

$(1-\lambda)T_n=\lambda^2+\lambda^3+\cdots+\lambda^n-(n-1)\lambda^{n+1}=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}-(n-1)\lambda^{n+1}$，

所以 $T_n=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}-\frac{(n-1)\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$
$=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}$，

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和

$S_n=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2$.

当 $\lambda=1$ 时，$T_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

此时数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2$.

综上，

$$S_n=\begin{cases}\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2,\lambda\neq 1,\\ \frac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2,\lambda=1.\end{cases}$$

22.(1)证明：因为 $f(x)=\frac{1}{4^x+2}$，

所以 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{4^x+2}+\frac{1}{4^{1-x}+2}=\frac{1}{4^x+2}+\frac{4^x}{4+2\cdot 4^x}=\frac{2+4^x}{2(2+4^x)}=\frac{1}{2}$.

(2)解：由(1)知 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$，

故 $f(0)+f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$=f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\cdots=\frac{1}{2}$.

$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，

又 $a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+f(0)$，

两式相加，得 $2a_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]+\cdots+[f(1)+f(0)]=\frac{1}{2}(n+1)$，

所以 $a_n=\frac{n+1}{4}$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(3)解：由(2)知 $a_n=\frac{n+1}{4}$，$n\in\mathbf{N}_+$.

所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}$，$n\in\mathbf{N}_+$，

所以数列$\{a_n\}$是一个等差数列，

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\left(\frac{1}{2}+\frac{n+1}{4}\right)}{2}=\frac{n(n+3)}{8}$，

由 $S_n\geqslant\lambda a_n\Rightarrow\frac{n(n+3)}{8}\geqslant\lambda\cdot\frac{n+1}{4}\Rightarrow\lambda\leqslant\frac{n(n+3)}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left[(n+1)-\frac{2}{n+1}+1\right]$.

又因为 $g(n)=(n+1)-\frac{2}{n+1}+1$ 在 $n\in\mathbf{N}_+$ 上为递增函数，

所以当 $n=1$ 时，$\left[(n+1)-\frac{2}{n+1}+1\right]_{\min}=2$，

所以 $\lambda\leqslant 1$，所以实数 λ 的取值范围为$(-\infty,1]$.

数学·高考版(理)

第18期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C 2.D 3.A 4.B 5.B 6.C 7.A

8.D 9.B 10.B 11.C

12.A

提示:设点O到底面PQR的距离为h,即三棱锥O-PQR的高为h.设底面PQR的面积为S,则三棱锥O-PQR的体积为$V=f(x)=\frac{1}{3}Sh$.当点P从S到A的过程中,底面积S一直在增大,高h先减小再增大,当底面经过点O时,高为0,所以体积V先增大,后减少,再增大,故选A.

二、填空题

13.12π 14.$2\pi R^2$ 15.$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

16.$\frac{1}{3}$

提示:$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}$,当$\triangle ABC$的面积最大时,三棱锥P-ABC的体积达到最大值.当$CO\perp AB$时,$\triangle ABC$的面积最大,最大值为$\frac{1}{2}\times2\times1=1$,此时$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$.

三、解答题

17.**解:**从图中可以看出,上、下两个面的表面积是相同的,同样,前与后,左与右两个面的表面积也是分别相同的.因为小正方体的棱长是1cm,所以上面的表面积为$1^2\times9=9(\text{cm}^2)$,前面的表面积为$1^2\times8=8(\text{cm}^2)$,左面的表面积为$1^2\times7=7(\text{cm}^2)$.所以几何体的表面积为$(9+8+7)\times2=48(\text{cm}^2)$.

18.**解:**(1)由三视图可知,该几何体是个组合体,其上部分是个三棱锥,其三条侧棱两两垂直;下部分为一个半球,并且三棱锥的底面与半球的底面相切.

(2)由图可知,$V_{三棱锥}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times1=\frac{1}{6}$;

球半径$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

所以此几何体的体积$V=\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}(\text{cm}^3)$.

(3)这100件铁件的质量$m=100\times\frac{1+\sqrt{2}\pi}{6}\times7.8\approx130\times(1+1.4\times3.1)=694.2(\text{g})$.

19.(1)**证明:**由已知条件得$AM=\frac{2}{3}AD=2$.

如图所示,取BP的中点T,连接AT,TN.

因为N为PC的中点,所以$TN\parallel BC$,

$TN=\frac{1}{2}BC=2$,所以$TN=AM$.

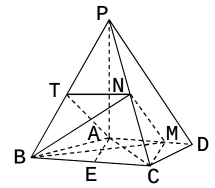
又$AD\parallel BC$,所以$TN\parallel AM$,且$TN=AM$,

故四边形AMNT为平行四边形,

所以$MN\parallel AT$.

因为$AT\subset$平面PAB,$MN\not\subset$平面PAB,

所以$MN\parallel$平面PAB.



(第19题图)

(2)**解:**因为$PA\perp$平面ABCD,N为PC的中点,

所以N到平面ABCD的距离为$\frac{1}{2}PA$.

取BC的中点E,连接AE.因为AB=AC=3,

所以$AE\perp BC$.$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5}$.

因为$AM\parallel BC$,

所以点M到BC的距离为$\sqrt{5}$,

故$S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

所以四面体N-BCM的体积

$V_{N-BCM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}PA\cdot S_{\triangle BCM}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

20.(1)**证明:**因为$QD\perp$平面ABCD,$PA\parallel QD$,

所以$PA\perp$平面ABCD,

又因为$BC\subset$平面ABCD,所以$PA\perp BC$.

又$AB\perp BC$,且$AB\cap PA=A$,

所以$BC\perp$平面PAB.

因为$BC\subset$平面QBC,

所以平面$PAB\perp$平面QBC.

(2)**解:**如下图,连接BD,过点B作$BO\perp AD$于O,则$BO=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{3}$.

因为$PA\perp$平面ABCD,$BO\subset$平面ABCD,

所以$PA\perp BO$.

又$AD\perp OB$,$PA\cap AD=A$,

所以$BO\perp$平面PADQ.

因为$S_{PADQ}=\frac{1}{2}(PA+QD)\cdot AD=3$,

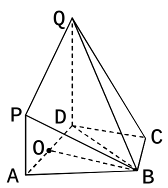
所以$V_{B-PADQ}=\frac{1}{3}S_{PADQ}BO=\sqrt{3}$.

因为$QD\perp$平面ABCD,$S_{\triangle BDC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以$V_{Q-BDC}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}QD=\frac{2\sqrt{3}}{9}$,

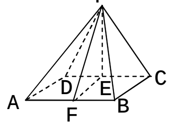
所以该多面体的体积为

$V_{B-PADQ}+V_{Q-BDC}=\frac{11\sqrt{3}}{9}$.



(第20题图)

21.(1)**证明:**依题意,可知点P在平面ABCD上的射影是线段CD的中点,设CD中点为E,连接PE,则$PE\perp$平面ABCD.



(第21题图)

因为$AD\subset$平面ABCD,

所以$AD\perp PE$.

因为$AD\perp CD$,$CD\cap PE=E$,$CD\subset$平面PCD,$PE\subset$平面PCD,

所以$AD\perp$平面PCD.

因为$PC\subset$平面PCD,所以$AD\perp PC$.

(2)**解:**依题意,在等腰三角形PCD中,

PC=PD=3,DE=EC=2,

在$Rt\triangle PED$中,$PE=\sqrt{PD^2-DE^2}=\sqrt{5}$.

如图,过点E作$EF\perp AB$,垂足为F,连接PF,

因为$PE\perp$平面ABCD,$AB\subset$平面ABCD,

所以$AB\perp PE$.

又$PE\cap EF=E$,所以$AB\perp$平面PEF.

因为$PF\subset$平面PEF,所以$AB\perp PF$.

依题意,得EF=AD=2.

在$Rt\triangle PEF$中,$PF=\sqrt{PE^2+EF^2}=3$,

所以$\triangle PAB$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PF=6$.

所以四棱锥P-ABCD的侧面PAB的面积为6.

22.**解:**(1)因为$EF\perp AB$,所以$EF\perp PE$.

又因为$PE\perp AE$,$EF\cap AE=E$,且PE在平面ACFE外,所以$PE\perp$平面ACFE.

因为$EF\perp AB$,$CD\perp AB$,所以$EF\parallel CD$.

所以$\frac{EF}{CD}=\frac{x}{BD}\Rightarrow EF=\frac{CD}{BD}x=\frac{x}{\sqrt{6}}$.

所以四边形ACFE的面积

$S_{四边形ACFE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{6}\times3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}x^2=9\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$.

所以四棱锥P-ACFE的体积

$V_{P-ACFE}=\frac{1}{3}S_{四边形ACFE}\cdot PE=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3$,

即$V(x)=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3(0<x<3\sqrt{6})$.

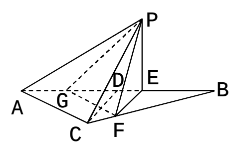
(2)由(1)知$V'(x)=3\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$.

令$V'(x)=0$,解得x=6.

所以当$0<x<6$时,$V'(x)>0$,

当$6<x<3\sqrt{6}$时,$V'(x)<0$.

所以当BE=x=6时,V(x)有最大值,最大值为$V(6)=12\sqrt{6}$.



(第22题图)

(3)过点F作$FG\parallel AC$交AE于点G,连接PG,则$\angle PFG$或其补角为异面直线AC与PF所成的角,因为$\triangle ABC$是等腰三角形,所以$\triangle GBF$也是等腰三角形.于是$FG=BF=PF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{42}$,从而$PG=\sqrt{PE^2+GE^2}=\sqrt{BE^2+BE^2}=6\sqrt{2}$.

在$\triangle GPF$中,根据余弦定理,得

$\cos\angle PFG=\frac{PF^2+FG^2-PG^2}{2PF\cdot FG}=\frac{1}{7}$.

故异面直线AC与PF所成角的余弦值为$\frac{1}{7}$.

数学·高考版(理)
第 19 期
第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B　2.A　3.D　4.C　5.D　6.C
7.A　8.D　9.C　10.B　11.B
12.A

提示:连接 BD,交 AC 于点 O,连接 SO.在正四棱锥 $S-ABCD$ 中,点 S 在底面 $ABCD$ 内的射影为点 O,可得 $SO\perp$ 平面 $ABCD$, 从而易证 $AC\perp$ 平面 SBD. 分别取 CD,CS 的中点 F,G,连接 EF,FG,EG,则可证平面 $EFG\parallel$平面 SBD.所以 $AC\perp$平面 EFG.所以 $AC\perp FG$.因此,点 P 在 FG 上移动时总有 $AC\perp EP$.故选 A.

二、填空题

13.平行　14.$BM\perp PC$　15.$2\sqrt{3}$
16.②

提示:①连接 A_1D,B_1C,点 P 到平面 QEF 的距离即为点 P 到平面 A_1B_1CD 的距离,只需过点 P 作 A_1D 的垂线,垂足为 G,因为 $A_1B_1\perp PG$,又 $A_1D\perp PG$,故 $PG\perp$平面 A_1B_1CD,即 PG 即为所求距离,易知 $PG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$;③设 EF 的长为 b,三棱锥 $P-QEF$ 的底面面积 $S_{\triangle QEF}=\frac{1}{2}\times b\times\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}ab$,高为定值 $PG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$,故其体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}ab=\frac{a^2b}{12}$,故为定值;④连接 PD,易证得 $A_1D\perp EF$,$PD\perp EF$,故$\angle PDA_1$即为二面角 $P-EF-Q$ 的平面角,故为定值.填②.

三、解答题

17.(1)**证明**:连接 AC_1,交 A_1C 于点 F,连接 DF.由矩形 ACC_1A_1,可得点 F 是 AC_1 的中点,又 D 是 AB 的中点,所以 $DF\parallel BC_1$. 因为 $BC_1\not\subset$平面 A_1CD,$DF\subset$平面 A_1CD,所以 $BC_1\parallel$平面 A_1CD.

(2)**解**:由(1)知 $DF\parallel BC_1$,所以$\angle A_1DF$ 或其补角为异面直线 BC_1 和 A_1D 所成的角.设 $AB=2$,则 $DF=\frac{1}{2}BC_1=\frac{1}{2}\sqrt{BC^2+CC_1^2}=1$,$A_1D=\sqrt{AA_1^2+AD^2}=\sqrt{3}$,$A_1F=\frac{1}{2}A_1C=\frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2+AC^2}=1$.在等腰$\triangle A_1DF$ 中,过点 F 作 $FG\perp A_1D$ 于 G,则在 Rt$\triangle FGD$ 中,可得 $FG=\frac{1}{2}DF$,所以$\angle A_1DF=30°$.故异面直线 BC_1 和 A_1D 所成角的大小为 30°.

18.(1)**证明**:因为$\angle ABC=\angle BCD=90°$,$BC=CD=\frac{1}{2}AB$,设 $BC=1$,则 $AD=BD=\sqrt{2}$,所以 $AD^2+BD^2=AB^2$,所以 $AD\perp BD$.又 $PB\perp$平面 $ABCD$.所以 $PB\perp AD$.又 $BD\cap PB=B$,$BD\subset$平面 PBD,$PB\subset$平面 PBD,所以 $AD\perp$平面 PBD,又 $AD\subset$平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$平面 PBD.

(2)**解**:当 $PQ=2QC$ 时,$PA\parallel$平面 QBD,证明如下:

连接 AC 交 BD 于点 M, 因为 $2CD=AB$,$CD\parallel AB$,所以 $AM=2MC$,过 PA 的平面 $PAC\cap$平面 $QBD=MQ$,

在$\triangle APC$ 中,$\frac{CQ}{PQ}=\frac{CM}{AM}=\frac{1}{2}$,

所以 $PA\parallel MQ$.

又 $MQ\subset$平面 QBD,$PA\not\subset$平面 QBD,

所以 $PA\parallel$平面 QBD.

19.(1)**证明**:因为在$\triangle PBD$ 中,O,M 分别是 BD,PD 的中点,

所以 $OM\parallel PB$.

又 $OM\not\subset$平面 PAB,$PB\subset$平面 PAB,

所以 $OM\parallel$平面 PAB.

(2)**证明**:因为底面 $ABCD$ 是菱形,

所以 $BD\perp AC$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp BD$.又 $AC\cap PA=A$,

所以 $BD\perp$平面 PAC.

又 $BD\subset$平面 PBD,

所以平面 $PBD\perp$平面 PAC.

(3)**解**:因为底面 $ABCD$ 是菱形,

且 $AB=2$,$\angle BAD=60°$,

所以 $S_{\triangle BCD}=\sqrt{3}$.

又 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$,三棱锥 $P-BCD$ 的高为 PA,

所以$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\cdot PA=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $PA=\frac{3}{2}$.

20.(1)**证明**:设 AC,BD 的交点为 O,则 O 为 BD 的中点,连接 OF,如图所示.

由 $EF\parallel BD$,$EF=\frac{1}{2}BD$,

得 $EF\parallel OD$,$EF=OD$,

所以四边形 $EFOD$ 为平行四边形,

所以 $ED\parallel OF$.

因为 $ED\not\subset$平面 ACF,$OF\subset$平面 ACF,

所以 $DE\parallel$平面 ACF.

(2)**解**:因为平面 $EFBD\perp$平面 $ABCD$,交线为 BD,$AO\perp BD$,

所以 $AO\perp$平面 $EFBD$.作 $OM\perp BF$ 于点 M,连接 AM.

因为 $AO\perp$平面 $EFBD$,所以 $AO\perp BF$.

又 $OM\cap AO=O$,所以 $BF\perp$平面 AOM,

所以 $BF\perp AM$.

故$\angle AMO$ 为二面角 $A-BF-D$ 的平面角.

取 EF 的中点 P,连接 OP.

因为四边形 $EFBD$ 为等腰梯形,

故 $OP\perp BD$.

因为 $S_{梯形EFBD}=\frac{1}{2}(EF+BD)\cdot OP=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot OP=3$,

所以 $OP=\sqrt{2}$.

由 $PF=\frac{1}{2}OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

得 $BF=OF=\sqrt{OP^2+PF^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

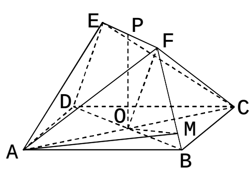
因为 $S_{\triangle FOB}=\frac{1}{2}OB\cdot OP=\frac{1}{2}OM\cdot BF$,

所以 $OM=\frac{OB\cdot OP}{BF}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,

$AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$,

所以 $\cos\angle AMO=\frac{OM}{AM}=\frac{2}{3}$,

故二面角 $A-BF-D$ 的余弦值为$\frac{2}{3}$.



(第 20 题图)

21.(1)**证明**:在底面 $ABCD$ 中,由题意可知$\triangle DOC\backsim\triangle BOA$,且相似比为 1:2,

所以 $DO:OB=1:2$.

又因为 $DE:EA_1=1:2$,所以 $EO\parallel A_1B$.

又因为 $EO\not\subset$平面 A_1ABB_1,$A_1B\subset$平面 A_1ABB_1,

所以 $EO\parallel$平面 A_1ABB_1.

(2)**解**:连接 A_1O.在底面 $ABCD$ 中,

$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=2\sqrt{3}$,

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{6}$,

$OA=\frac{2}{3}AC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$OB=\frac{2}{3}BD=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,

所以 $OA^2+OB^2=AB^2$,所以 $AC\perp BD$.

又因为 $AA_1\perp$底面 $ABCD$,

所以 $AA_1\perp BD$.

因为 $AA_1\cap AC=A$,

所以 $BD\perp$平面 A_1ACC_1,

所以$\angle BA_1O$ 为直线 A_1B 与平面 A_1ACC_1 所成角.

在 Rt$\triangle BA_1O$ 中,$A_1B=\sqrt{AA_1^2+AB^2}=2\sqrt{5}$,$\sin\angle BA_1O=\frac{OB}{A_1B}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

所以直线 A_1B 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

22.(1)**证明**:因为平面 $A'DE\perp$平面 $DBCE$,$A'D\perp DE$,平面 $A'DE\cap$平面 $DBCE=DE$,

所以 $A'D\perp$平面 $DBCE$,所以 $A'D\perp BE$.

因为 D,E 分别为 AB,AC 的中点,

所以 $DE=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$,$BD=\frac{1}{2}AB=2$.

因为 $\tan\angle BED=\frac{BD}{DE}=\sqrt{2}$,

$\tan\angle CDE=\tan\angle DCB=\frac{BD}{CB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\tan\angle BED\cdot\tan\angle CDE=1$,

所以$\angle BED+\angle CDE=90°$,

所以 $BE\perp DC$.

因为 $A'D\cap DC=D$,

所以 $BE\perp$平面 $A'DC$.

又 $BE\subset$平面 FBE,

所以平面 $FBE\perp$平面 $A'DC$.

(2)**解**:作 $FG\perp DC$,垂足为 G,

则 $FG\parallel A'D$,所以 $FG\perp$平面 $DBCE$.

设 BE 交 DC 于点 O,连接 OF,

由(1)知,$\angle FOG$ 为二面角 $F-BE-C$的平面角.

由 $FG\parallel A'D$,得$\frac{FG}{A'D}=\frac{CF}{CA'}=\lambda$,

所以 $FG=\lambda A'D=2\lambda$.

同理,得 $CG=\lambda CD$,$DG=(1-\lambda)CD=2\sqrt{3}(1-\lambda)$.

因为 $DO=\frac{BD\cdot DE}{BE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $OG=DG-DO=2\sqrt{3}(1-\lambda)-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在 Rt$\triangle OGF$ 中,由 $\tan\angle FOG=\frac{FG}{OG}=\frac{2\lambda}{2\sqrt{3}(1-\lambda)-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=1$,得 $\lambda=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

数学·高考版(理)

第 20 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1~6.CACCAC　7~12.ABCCAA

二、填空题

13.$b+c-a$　14.$\frac{9}{4}$　15.4π　16.$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

三、解答题

17.**解**:以 B 为坐标原点,以 BC,BA,BD 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$E(1,1,0)$.

设点 D 的坐标为 $(0,0,z)(z>0)$,则 $\overrightarrow{BE}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,-2,z)$,设 $\overrightarrow{BE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 所成角为 θ,则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{2}\times\sqrt{4+z^2}\cdot\cos\theta=-2$,且 AD 与 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$,

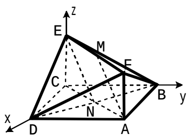
所以 $|\cos\theta|=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{4+z^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\cos^2\theta=\frac{2}{4+z^2}=\frac{1}{10}$,得 $z=4$,即 BD 的长为 4.

又 $V_{ABCD}=\frac{1}{6}|AB|\cdot|BC|\cdot|BD|=\frac{1}{6}\times2\times2\times4=\frac{8}{3}$,

因此四面体 ABCD 的体积是 $\frac{8}{3}$.

18.**证明**:(1)建立如图所示的空间直角坐标系,



(第 18 题图)

设 AC∩BD=N,连接 NE.则点 N,E 的坐标分别为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{NE}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

又点 A,M 的坐标分别为

$(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

所以 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

所以 $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{AM}$ 且 NE 与 AM 不共线.所以 NE∥AM.

又因为 NE⊂平面 BDE,AM⊄平面 BDE,所以 AM∥平面 BDE.

(2)由(1)得,$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,

因为 $D(\sqrt{2},0,0)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,

所以 $\overrightarrow{DF}=(0,\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{BF}=(\sqrt{2},0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}=0$,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BF}=0$.

所以 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DF}$,$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BF}$,

即 AM⊥DF,AM⊥BF.

又 DF∩BF=F,所以 AM⊥平面 BDF.

19.**解**:(1)如图,连接 BD,设 BD∩AC=G,连接 EG,FG,EF.

在菱形 ABCD 中,不妨设 GB=1.

由∠ABC=120°,可得 $AG=GC=\sqrt{3}$,由 BE⊥平面 ABCD,AB=BC,可知 AE=EC.又 AE⊥EC,所以 $EG=\sqrt{3}$,且 EG⊥AC.

在 Rt△EBG 中,可得 $BE=\sqrt{2}$,故 $DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在 Rt△FDG 中,可得 $FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

在直角梯形 BDFE 中,

由 $BD=2$,$BE=\sqrt{2}$,$DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

可得 $EF=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

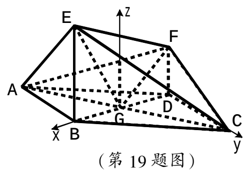
从而 $EG^2+FG^2=EF^2$,所以 EG⊥FG.

又 AC∩FG=G,所以 EG⊥平面 AFC.

因为 EG⊂平面 AEC,

所以平面 AEC⊥平面 AFC.

(2)如图,以 G 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{GB}$,$\overrightarrow{GC}$ 的方向为 x 轴,y 轴正方向,$|\overrightarrow{GB}|$ 为单位长,建立空间直角坐标系 Gxyz.由(1)可得 $A(0,-\sqrt{3},0)$,



(第 19 题图)

$E(1,0,\sqrt{2})$,$F\left(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{3},\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CF}=\left(-1,-\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CF}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

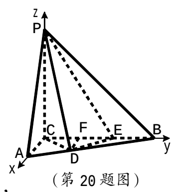
所以直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20.(1)**证明**:因为 $PC\perp$ 平面 ABC,$DE\subset$ 平面 ABC,所以 $PC\perp DE$.

因为 $CE=2$,$CD=DE=\sqrt{2}$,所以 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形,故 $CD\perp DE$.

又 $PC\cap CD=C$,所以 $DE\perp$ 平面 PCD.

(2)**解**:由(1)知,$\triangle CDE$ 为等腰直角三角形,$\angle DCE=\frac{\pi}{4}$.如图,过 D 作 $DF\perp CE$ 于点 F,



(第 20 题图)

易知 $DF=FC=FE=1$,

又 $EB=1$,所以 $FB=2$.

因为 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$,

所以 $DF\parallel AC$,$\frac{DF}{AC}=\frac{FB}{BC}=\frac{2}{3}$,

故 $AC=\frac{3}{2}DF=\frac{3}{2}$.

以 C 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CP}$ 的方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立空间直角坐标系 Cxyz,则 $C(0,0,0)$,$P(0,0,3)$,$A\left(\frac{3}{2},0,0\right)$,$E(0,2,0)$,$D(1,1,0)$,$\overrightarrow{ED}=(1,-1,0)$,$\overrightarrow{DP}=(-1,-1,3)$,$\overrightarrow{DA}=\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$.

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

由 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DP}=0$,$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=0$,

得 $\begin{cases}-x_1-y_1+3z_1=0,\\ \frac{1}{2}x_1-y_1=0,\end{cases}$ 故可取 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,1)$.

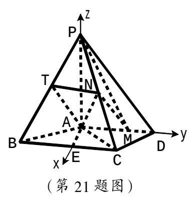
由(1)可知 $DE\perp$ 平面 PCD,故平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 可取为 $\overrightarrow{ED}$,即 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,0)$.

从而法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 的夹角的余弦值为 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故所求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

21.(1)**证明**:由已知得 $AM=\frac{2}{3}AD=2$.

如图,取 BP 的中点 T,连接 AT,TN.



(第 21 题图)

因为 N 为 PC 中点,

所以 TN∥BC,$TN=\frac{1}{2}BC=2$.

又 AD∥BC,

所以 TN$\underline{\parallel}$AM,

所以四边形 AMNT 为平行四边形,

所以 MN∥AT.

因为 AT⊂平面 PAB,MN⊄平面 PAB,

所以 MN∥平面 PAB.

(2)**解**:如图,取 BC 的中点 E,连接 AE,由 AB=AC,得 AE⊥BC,从而 AE⊥AD,且 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$.

以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 Axyz,则 $A(0,0,0)$,$P(0,0,4)$,$M(0,2,0)$,$C(\sqrt{5},2,0)$,所以 $N\left(\frac{\sqrt{5}}{2},1,2\right)$,$\overrightarrow{PM}=(0,2,-4)$,$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},1,-2\right)$,$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},1,2\right)$.

设 $n=(x,y,z)$ 为平面 PMN 的法向量,

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PM}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{PN}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y-4z=0,\\ \frac{\sqrt{5}}{2}x+y-2z=0,\end{cases}$

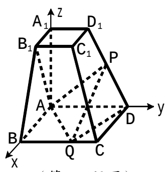
令 $z=1$,则 $n=(0,2,1)$.

设直线 AN 与平面 PMN 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AN}\rangle|$

$=\frac{|n\cdot\overrightarrow{AN}|}{|n||\overrightarrow{AN}|}=\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

22.(1)**证明**:由题设知,AA_1,AB,AD 两两垂直.以 A 为坐标原点,AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 Axyz,则 $A(0,0,0)$,$B_1(3,0,6)$,$D(0,6,0)$,$D_1(0,3,6)$,$Q(6,m,0)$,其中 $m=|BQ|$,$0\leqslant m\leqslant6$.



(第 22 题图)

若 P 是 DD_1 的中点,

则 $P\left(0,\frac{9}{2},3\right)$,$\overrightarrow{PQ}=\left(6,m-\frac{9}{2},-3\right)$.

又 $\overrightarrow{AB_1}=(3,0,6)$,所以 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=18-18=0$.

所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{PQ}$.所以 $AB_1\perp PQ$.

(2)**解**:由题设结合(1)知,$\overrightarrow{DQ}=(6,m-6,0)$,$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$ 是平面 PQD 内的两个不共线向量.设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 是平面 PQD 的一个法向量,

则 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{DD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6x+(m-6)y=0,\\ -3y+6z=0.\end{cases}$

取 $y=6$,得 $\boldsymbol{n}_1=(6-m,6,3)$.

又平面 AQD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{3}{1\cdot\sqrt{(6-m)^2+6^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}$.

而二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$,因此 $\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}=\frac{3}{7}$,解得 $m=4$,或 $m=8$(舍去),此时 $Q(6,4,0)$.

设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}(0<\lambda\leqslant1)$,而 $\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$,得点 P 的坐标为 $P(0,6-3\lambda,6\lambda)$,所以 $\overrightarrow{PQ}=(6,3\lambda-2,-6\lambda)$.

因为 $PQ\parallel$ 平面 ABB_1A_1,且平面 ABB_1A_1 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_3=(0,1,0)$,所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}_3=0$,即 $3\lambda-2=0$,亦即 $\lambda=\frac{2}{3}$,从而 $P(0,4,4)$.

于是,将四面体 $ADPQ$ 视为以 $\triangle ADQ$ 为底面的三棱锥 $P-ADQ$,则其高 $h=4$,故四面体 $ADPQ$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times4=24$.