

数学·高考版(理)

第4期

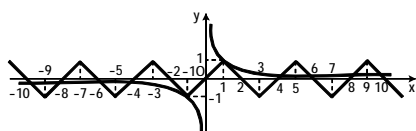
第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1.D 2.B 3.C 4.B 5.A 6.A 7.D
8.A 9.D 10.D 11.B
12.C

提示:在同一坐标系中画出函数 $y=$

$f(x)$ 的图象和函数 $y=\frac{1}{x}+a$ 如下图所示:



(第12题图)

$y=\frac{1}{x}+a$ 的图象是由 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上下

平移得到的,由图得,向上平移时保证图象第三象限的部分在 x 轴的下方,则第一象限部分有 4 个交点,第三象限部分有 6 个交点;同时向下平移时保证图象第一象限的部分在 x 轴的上方,则第一象限的部分有 6 个交点,第三象限部分有 4 个交点,即

$$\begin{cases} -\frac{1}{10}+a \leq 0, \\ \frac{1}{10}+a \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } -\frac{1}{10} \leq a \leq \frac{1}{10}. \text{ 故选 C.}$$

二、填空题

13. $[0, 2)$

$$14. f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

15. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

16. $[1-\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$

提示:因为 $f(x)$ 为“局部奇函数”,

所以存在实数 x 满足 $f(-x)=-f(x)$,

即 $4^x-2m2^x+m^2-3=-4^x+2m2^x-m^2+3$ 有解.

令 $t=2^x(t>0)$, 则 $\frac{1}{t^2}+t^2-2m(\frac{1}{t}+t)+$

$$2m^2-6=0, (\frac{1}{t}+t)^2-2m(\frac{1}{t}+t)+2m^2-8=0 \text{ 在}$$

$t \in (0, +\infty)$ 上有解.再令 $h=\frac{1}{t}+t(h \geq 2)$, 则

$g(h)=h^2-2mh+2m^2-8=0$ 在 $h \in [2, +\infty)$ 上有解.函数 $g(h)$ 的对称轴为 $h=m$. ①当 $m \geq 2$ 时, $g(h) \geq g(m)$, 所以 $g(m)=m^2-2m^2+2m^2-8 \leq 0$, 解得 $2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$; ②当 $m < 2$ 时, 则 $g(h) \geq g(2)$, 所以 $g(2)=4-4m+2m^2-8 \leq 0$, 即 $m^2-2m-2 \leq 0$, 解得 $1-\sqrt{3} \leq m < 2$.

综合①②, 可知 $1-\sqrt{3} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

三、解答题

$$17. \text{解: } f(x) = (a - \frac{1}{a})x + \frac{1}{a},$$

当 $a > 1$ 时, $a - \frac{1}{a} > 0$,

此时 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为增函数,

所以 $g(a)=f(0)=\frac{1}{a}$;

当 $0 < a < 1$ 时, $a - \frac{1}{a} < 0$,

此时 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数,

所以 $g(a)=f(1)=a$;

当 $a=1$ 时, $f(x)=1$, 此时 $g(a)=1$.

$$\text{所以 } g(a) = \begin{cases} a, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{a}, & a \geq 1. \end{cases}$$

所以 $g(a)$ 在 $(0, 1)$ 上为增函数, 在 $[1, +\infty)$ 上为减函数.

又 $a=1$ 时, 有 $a=\frac{1}{a}=1$,

所以当 $a=1$ 时, $g(a)$ 取最大值 1.

18. 解: (1) 设 $x \in [0, 1]$,

则 $-x \in [-1, 0]$,

$$\text{所以 } f(-x) = \frac{1}{4^{-x}} - \frac{1}{2^{-x}} = 4^x - 2^x.$$

又因为 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $-f(x)=4^x-2^x$, 所以 $f(x)=2^x-4^x$, 所以

以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的解析式为 $f(x)=2^x-4^x$.

(2) 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)=2^x-4^x=2^x-(2^x)^2$,

所以设 $t=2^x(t>0)$, 则 $f(t)=t-t^2$.

因为 $x \in [0, 1]$, 所以 $t \in [1, 2]$.

此时 $f(t)$ 为减函数, 所以当 $t=1$ 时, 取最大值, 最大值为 $f(1)=1-1=0$. 当 $t=2$ 时, 取最小值, 最小值为 $f(2)=-2$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大与最小值分别为 0, -2.

19. 解: (1) 设点 (x, y) 是 $y=g(x)$ 上的任意一点, 则 $(-x, -y)$ 在 $y=f(x)$ 上,

则 $-y=(-x)^2-x=x^2-x$, 即 $y=g(x)=-x^2+x$.

(2) $h(x)=-x^2+x-mx^2-mx+3=(-1-m)x^2+(1-m)x+3$,

当 $-1-m>0$, 即 $m<-1$ 时, 对称轴 $x=$

$$\frac{1-m}{2(m+1)} \leq -1, \text{ 所以 } -3 \leq m < -1;$$

当 $-1-m=0$, 即 $m=-1$ 时, $h(x)=2x+3$, 符合题意, 所以 $m=-1$;

当 $-1-m<0$, 即 $m>-1$ 时, 对称轴 $x=$

$$\frac{1-m}{2(m+1)} \geq 1, \text{ 所以 } -1 < m \leq -\frac{1}{3}.$$

综上, 实数 m 的取值范围是 $[-3, -\frac{1}{3}]$.

20. 解: (1) 由题意, 可知

$$\begin{cases} -2 < x-1 < 2, \\ -2 < 3-2x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2},$$

所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

(2) 由 $g(x) \leq 0$, 得 $f(x-1)+f(3-2x) \leq 0$, 所以 $f(x-1) \leq -f(3-2x)$.

又因为 $f(x)$ 是奇函数,

所以 $f(x-1) \leq f(2x-3)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } \begin{cases} -2 < x-1 < 2, \\ -2 < 2x-3 < 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x \leq 2, \\ x-1 \geq 2x-3 \end{cases}$$

所以 $g(x) \leq 0$ 的解集为 $(\frac{1}{2}, 2]$.

21. 解: (1) 由已知令 $x=y=0$, 可得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$, 所以 $f(0)=0$.

由 $f(1)=2$, 得 $f(2)=f(1)+f(1)=2+2=4$, $f(3)=f(2)+f(1)=6$.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2-x_1 > 0$, 且 $f(x_2-x_1) > 0$,

又因为 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1) > 0$,

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的增函数.

(3) $f(4^x-a)+f(6+2^{x+1}) > 6$ 恒成立,

由已知及 (1) 即为 $f(4^x-a+6+2^{x+1}) > f(3)$ 恒成立.

因为 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的增函数,

所以 $4^x-a+6+2^{x+1} > 3$ 恒成立,

即 $4^x+2 \times 2^x+3 > a$ 恒成立.

令 $g(x)=4^x+2 \times 2^x+3=(2^x+1)^2+2$.

因为 $2^x > 0$, 所以 $g(x) > 3$, 所以 $a \leq 3$.

即 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

22. 解: (1) $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$ 是 Ω 函数,

$g(x)=\sin \pi x$ 不是 Ω 函数.

(2) 因为 $f(x)$ 是以 T 为最小正周期的周期函数, 所以 $f(T)=f(0)$.

假设 $T < 1$, 则 $[T]=0$,

所以 $f([T])=f(0)$, 矛盾.

所以必有 $T \geq 1$,

而函数 $g(x)=x-[x]$ 的周期为 1,

且显然不是 Ω 函数,

综上, T 的最小值为 1.

(3) 当函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 是 Ω 函数时,

若 $a=0$, 则 $f(x)=x$ 显然不是 Ω 函数, 矛盾.

若 $a < 0$, 则 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递增,

此时不存在 $m \in (-\infty, 0), m \notin \mathbb{Z}$,

使得 $f(m)=f([m])$,

同理不存在 $m \in (0, +\infty), m \notin \mathbb{Z}$,

使得 $f(m)=f([m])$,

又注意到 $m[m] \geq 0$,

即不会出现 $[m] < 0 < m$ 的情形,

所以此时 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 不是 Ω 函数.

当 $a > 0$ 时, 设 $f(m)=f([m])$,

$$\text{所以 } m+\frac{a}{m}=[m]+\frac{a}{[m]},$$

所以有 $a=m[m]$, 其中 $[m] \neq 0$,

当 $m > 0$ 时, 因为 $[m] < m < [m]+1$,

所以 $[m]^2 < m[m] < ([m]+1)^2$,

所以 $[m]^2 < a < ([m]+1)^2$.

当 $m < 0$ 时, $[m] < 0$, 因为 $[m] < m < [m]+1$,

所以 $[m]^2 > m[m] > ([m]+1)^2$,

所以 $[m]^2 > a > ([m]+1)^2$.

记 $k=[m]$, 综上, 我们可以得到 a 的取值范围为 $\{a | a > 0 \text{ 且 } \forall k \in \mathbb{N}_+, a \neq k^2 \text{ 且 } a \neq k(k+1)\}$.