数学·高考版(理)

第8期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A 2.A 3.B 4.C 5.A 6.A
7.C 8.A 9.B 10.B 11.D
12.B

提示：由 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-kx=0$，得 $k=\frac{\ln x}{x^2}$.

由题意，得 $k=\frac{\ln x}{x^2}$ 在区间 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上有两个解.

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

令 $g'(x)=0$，$x=\sqrt{e}$，

当 $\frac{1}{e}<x<\sqrt{e}$ 时，$g'(x)>0$；

当 $\sqrt{e}<x<e^2$ 时，$g'(x)<0$.

因此，$x=\sqrt{e}$ 是 $g(x)$ 的唯一极大值点，也是最大值点，$g(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$，

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-e^2$，$g(e^2)=\frac{2}{e^4}$，

所以当 $\frac{2}{e^4}\leqslant k<\frac{1}{2e}$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象在区间 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上有两个交点，即方程 $k=\frac{\ln x}{x^2}$ 在区间 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上有两个解.故选B.

二、填空题

13.1 14.ln101 15.0

16.$\left[\frac{2}{e-2},+\infty\right)$

提示：当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{e^2x^2+1}{x}=e^2x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{e^2x\cdot\frac{1}{x}}=2e$，当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时取等号，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 $2e$.因为 $g(x)=\frac{e^2x^2}{e^x}$，所以 $g'(x)=\frac{e^2(2xe^x-x^2e^x)}{e^{2x}}=-\frac{e^2x(x-2)}{e^x}$.当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增；当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，则函数 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=2$ 时，函数 $g(x)$ 有最大值 $g(2)=4$，则当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时，$[f(x_2)]_{\min}=2e>[g(x_1)]_{\max}=4$.因为 $\frac{g(x_1)}{k}\leqslant\frac{f(x_2)}{k+1}$ 恒成立，且 $k>0$，所以 $\frac{k}{k+1}\geqslant\frac{4}{2e}$，所以 $k\geqslant\frac{2}{e-2}$.

三、解答题

17.**解**：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 内单调递减.

(2)由(1)知，当 $a\leqslant 0$ 时，

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最大值；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最大值，

最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}+a\left(1-\frac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$.

因此，$f\left(\frac{1}{a}\right)>2a-2\Leftrightarrow\ln a+a-1<0$.

令 $g(a)=\ln a+a-1$，

则 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是增函数，

$g(1)=0$，由 $g(a)<0$，得 $0<a<1$，

所以 a 的取值范围是 $(0,1)$.

18.**解**：(1)改进工艺后，每件纪念品的销售价为 $20(1+x)$ 元，月平均销售量为 $a(1-x^2)$ 件，月平均利润 $y=a(1-x^2)[20(1+x)-15]=5a(-4x^3-x^2+4x+1)(0<x<1)$.

(2)$y'=5a(-12x^2-2x+4)=-10a(2x-1)\cdot(3x+2)(0<x<1)$，

令 $y'=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{2}{3}$(舍去).

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$y'>0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$y'<0$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 有最大值，此时销售价为30元.所以改进工艺后，该纪念品的销售价为30元时，使得旅游部门销售纪念品的月平均利润最大.

19.(1)**解**：$g(x)=\ln x+x^2-3x$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}+2x-3$.

因为 $k=g'(1)=0$，$g(1)=-2$，

所以切线方程为 $y=-2$.

(2)**证明**：$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，要证原不等式成立只需证 $\frac{1}{x_2}<\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}<\frac{1}{x_1}$.

因为 $x_2>x_1$，即证 $\frac{x_2-x_1}{x_2}<\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2-x_1}{x_1}$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，

只需证 $1-\frac{1}{t}<\ln t<t-1$.

令 $K(t)=\ln t-t+1(t>1)$，

所以 $K'(t)=\frac{1}{t}-1<0$.

所以 $K(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$K(t)<K(1)=0$ 成立.

令 $h(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1(t>1)$，

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$h(t)>h(1)=0$ 成立.

综上所述，$\frac{1}{x_2}<k<\frac{1}{x_1}$.

20.(1)**证明**：由 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$，得 $h(1)=e-3<0$，$h(2)=e^2-3-\sqrt{2}>0$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有零点.

(2)**解**：由(1)得 $h(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$.

由 $g(x)=\sqrt{x}+x$，知 $x\in[0,+\infty)$，而 $h(0)=0$，则 $x=0$ 为 $h(x)$ 的一个零点，又 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内有零点，因此 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上至少有两个零点.因为 $h'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$，记 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$，则 $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，因此 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多只有一个零点，即 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 至多有两个零点.所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个零点，所以方程 $f(x)=g(x)$ 的根的个数为2.

21.(1)**解**：由题意得，$x\ln x-ax^2-x<-x$ 恒成立，

所以 $x\ln x-ax^2<0$ 恒成立，

又 $x\in(0,+\infty)$，所以 $a>\frac{\ln x}{x}$ 恒成立.

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $h'(x)>0$，得 $0<x<e$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上是增函数；

令 $h'(x)<0$，得 $x>e$，

所以 $h(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $[h(x)]_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$.

所以 $a>\frac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

(2)**证明**：由(1)得 $h(x)\leqslant h(e)=\frac{1}{e}$，

所以 $\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{e}$.

所以 $\ln x\leqslant\frac{x}{e}<x$，即 $\ln x<x$，

所以 $\ln 1<1$，$\ln 2<2$，$\ln 3<3$，…，$\ln 2017<2017$.

以上各式相加得，

$\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots\ln 2017<1+2+3+\cdots+2017$，

即 $\ln(1\times2\times3\times\cdots\times2017)<\frac{2017\times(1+2017)}{2}=2017\times1009$，

即 $\frac{1}{1009}\ln(1\times2\times3\times\cdots\times2017)<2017$，

所以 $\ln(2\times3\times\cdots\times2017)^{\frac{1}{1009}}<2017$.

22.**解**：(1)当 $m=-2$ 时，$f(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)+e^x(3x^2-4x-2)=xe^x(x^2+x-6)=(x+3)x(x-2)e^x$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$，或 $x=0$，或 $x=2$，

所以当 $x\in(-\infty,3)$ 和 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-3,0)$ 和 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减，

在 $(-3,0)$ 上单调递增，

在 $(0,2)$ 上单调递减，

在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{极小值}=f(-3)=-39e^{-3}$，

$f(x)_{极小值}=f(2)=-2e^2$，

$f(x)_{极大值}=f(0)=2$.

(2)$f'(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)+e^x(3x^2+2mx-2)=xe^x[x^2+(m+3)x+2m-2]$.

因为 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增，

所以当 $x\in[-2,-1]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$.

又当 $x\in[-2,-1]$ 时，$xe^x<0$，

所以当 $x\in[-2,-1]$ 时，

$x^2+(m+3)x+2m-2\leqslant 0$，

所以 $\begin{cases}(-2)^2-2(m+3)+2m-2\leqslant 0,\\(-1)^2-(m+3)+2m-2\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $m\leqslant 4$，

所以当 $m\in(-\infty,4]$ 时，

$f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增.