数学·高考版(理)

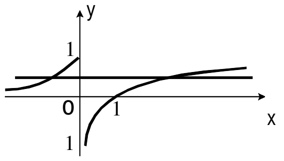
第6期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B　2.C　3.A　4.A　5.C　6.D　7.C　8.A　9.C　10.D　11.B　12.A

提示:函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, & x>0\\ a^x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的图象如图所示,由 $[f(x)]^2-bf(x)=0$,得 $f(x)\cdot[f(x)-b]=0$,则 $f(x)=0$,或 $f(x)-b=0$.当 $f(x)=0$ 时,$x=1$;当 $f(x)-b=0$,即 $b=f(x)$ 时,通过图象分析 $0<b\leqslant 1$ 时,函数 $f(x)$ 与直线 $y=b$ 有两个交点,故当 $0<b\leqslant 1$ 时,方程 $[f(x)]^2-bf(x)=0$ 恰有三个不同的实数根.



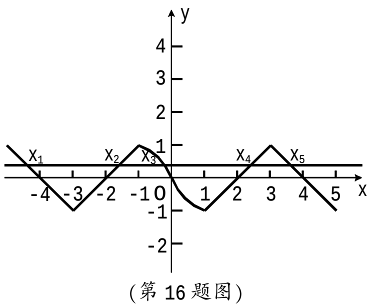
(第12题图)

二、填空题

13.144　14.2　15.$\dfrac{1210}{3}$

16.$\dfrac{1}{1-2\pi}$

提示:由题意知,当 $x<0$ 时,$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x}{1-x}, x\in(-1,0),\\ |x+3|-1, x\in(-\infty,-1).\end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示,设函数 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{\pi}$ 交点的横坐标从左到右依次为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,由图象的对称性可知,$x_1+x_2=-6$,$x_4+x_5=6$,$x_1+x_2+x_4+x_5=0$.令 $\dfrac{-2x}{1-x}=\dfrac{1}{\pi}$,解得 $x_3=\dfrac{1}{1-2\pi}$,所以函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{\pi}$ 的所有零点之和为 $\dfrac{1}{1-2\pi}$.



(第16题图)

三、解答题

17.**解**:原方程可化为 $(\lg a+\lg x)\cdot(\lg a+2\lg x)=4$,

即 $2(\lg x)^2+3(\lg a)\cdot(\lg x)+(\lg a)^2-4=0$.

令 $\lg x=t$,因为 $x>1$,所以 $t>0$,

则有 $2t^2+3(\lg a)\cdot t+(\lg a)^2-4=0$ 的解都是正数.

设 $f(t)=2t^2+3(\lg a)\cdot t+(\lg a)^2-4$,

则 $\begin{cases}\Delta=(3\lg a)^2-8[(\lg a)^2-4]\geqslant 0,\\ -\dfrac{3\lg a}{4}>0,\\ f(0)=(\lg a)^2-4>0,\end{cases}$

解得 $\lg a<-2$,所以 $0<a<\dfrac{1}{100}$,

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{100}\right)$.

18.**解**:(1)由题意,知 $b=4^x-2^{x+1}$.

因为 $4^x-2^{x+1}=(2^x)^2-2\times 2^x=(2^x-1)^2-1\geqslant -1$,

所以当 $b\in[-1,+\infty)$ 时,方程有实数解.

(2)①当 $b=-1$ 时,$2^x=1$,所以此时方程有唯一解 $x=0$;

②当 $b>-1$ 时,因为 $(2^x-1)^2=1+b\Rightarrow 2^x=1\pm\sqrt{1+b}$,因为 $2^x>0$,$1+\sqrt{1+b}>0$,所以 $2^x=1+\sqrt{1+b}$ 的解为 $x=\log_2(1+\sqrt{1+b})$.

令 $1-\sqrt{1+b}>0\Rightarrow\sqrt{1+b}<1\Rightarrow -1<b<0$,

所以当 $-1<b<0$ 时,$2^x=1-\sqrt{1+b}$ 的解为 $x=\log_2(1-\sqrt{1+b})$.

综上,得当 $-1<b<0$ 时原方程有两解,$x=\log_2(1\pm\sqrt{1+b})$;当 $b\geqslant 0$ 或 $b=-1$ 时,原方程有唯一解 $x=\log_2(1+\sqrt{1+b})$;当 $b<-1$ 时,原方程无解.

19.**解**:(1)$y_1=(10-a)x-20(1\leqslant x\leqslant 200, x\in\mathbf{N}_+)$,

$y_2=-0.05x^2+10x-40(1\leqslant x\leqslant 120, x\in\mathbf{N}_+)$.

(2)因为 $10-a>0$,所以 y_1 为增函数,

所以当 $x=200$ 时,y_1 取得最大值 $1980-200a$,即投资生产甲产品的最大年利润为 $(1980-200a)$ 万美元.

因为 $y_2=-0.05(x-100)^2+460(1\leqslant x\leqslant 120, x\in\mathbf{N}_+)$,

所以当 $x=100$ 时,y_2 取得最大值 460,即投资生产乙产品的最大年利润为 460 万美元.

(3)为研究生产哪种产品年利润最大,我们采用作差法比较:

由(2)知生产甲产品的最大年利润为 $(1980-200a)$ 万美元,生产乙产品的最大年利润为 460 万美元,

$(1980-200a)-460=1520-200a$,且 $6\leqslant a\leqslant 8$,

当 $1520-200a>0$,即 $6\leqslant a<7.6$ 时,投资生产甲产品 200 件可获得最大年利润;

当 $1520-200a=0$,即 $a=7.6$ 时,生产甲产品与生产乙产品均可获得最大年利润;

当 $1520-200a<0$,即 $7.6<a\leqslant 8$ 时,投资生产乙产品 100 件可获得最大年利润.

20.**解**:(1)$h(x)=\log_a(x-1)-\log_{\frac{1}{a}}(3-x)=\log_a(x-1)(3-x)$,

由 $\begin{cases}x-1>0,\\ 3-x>0,\end{cases}$ 得 $1<x<3$,所以函数 $h(x)$ 的定义域为 $(1,3)$.

令 $t=(x-1)(3-x)$,而 $x\in(1,3)$,

所以 $t\in(0,1]$.

当 $0<a<1$ 时,$\log_a t\geqslant 0$,即 $h(x)\geqslant 0$,

当 $a>1$ 时,$\log_a t\leqslant 0$,即 $h(x)\leqslant 0$,

所以当 $0<a<1$ 时,函数 $h(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$;当 $a>1$ 时,函数 $h(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

(2)由 $f(x)+g(x)\geqslant 0$,得 $f(x)\geqslant -g(x)$,

即 $\log_a(x-1)\geqslant\log_a(3-x)$,①

当 $0<a<1$ 时,要使不等式① 成立,

$\begin{cases}x-1>0,\\ 3-x>0,\\ x-1\leqslant 3-x,\end{cases}$ 即 $1<x\leqslant 2$;

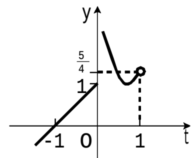
当 $a>1$ 时,要使不等式① 成立,

则 $\begin{cases}x-1>0,\\ 3-x>0,\\ x-1\geqslant 3-x,\end{cases}$ 即 $2\leqslant x<3$.

综上所述,当 $0<a<1$ 时,不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 0$ 中 x 的取值范围为 $(1,2]$;当 $a>1$ 时,不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 0$ 中 x 的取值范围为 $[2,3)$.

21.**解**:(1)由题意知,$g(f(1))=g(-3)=-3+1=-2$.

(2)令 $f(x)=t$,则原方程化为 $g(t)=a$.易知方程 $f(x)=t$ 在 $t\in(-\infty,1)$ 内有 2 个不同的实数根,则原方程有 4 个实数根等价于函数 $y=g(t)(t<1)$ 与 $y=a$ 的图象有 2 个不同的交点.作出函数 $y=g(t)(t<1)$ 的图象(如图所示),由图象可知,当 $1\leqslant a<\dfrac{5}{4}$ 时,函数 $y=g(t)(t<1)$ 与 $y=a$ 有 2 个不同的交点,即所求 a 的取值范围是 $\left[1,\dfrac{5}{4}\right)$.



(第21题图)

22.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=x^3+x^2-x+m$,因为 $f(x)$ 有三个互不相同的零点,

所以方程 $x^3+x^2-x+m=0$ 有三个互不相同的实数根,即 $y=-x^3-x^2+x$ 与 $y=m$ 的图象有三个交点.

令 $g(x)=-x^3-x^2+x$,

则 $g'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$.

令 $g'(x)>0$,得 $-1<x<\dfrac{1}{3}$;

令 $g'(x)<0$,得 $x<-1$,或 $x>\dfrac{1}{3}$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 上为减函数,在 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 内为增函数,所以 $[g(x)]_{极小值}=g(-1)=-1$,$[g(x)]_{极大值}=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{27}$,所以 $-1<m<\dfrac{5}{27}$,

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-1,\dfrac{5}{27}\right)$.

(2)$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$,由题设可知,方程 $3x^2+2ax-a^2=0(a>0)$ 在 $[-1,1]$ 上没有实数根.

方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的根为 $x_1=-a<0$,$x_2=\dfrac{a}{3}>0$.若方程 $f'(x)=0$ 在 $[-1,1]$ 上没有实数根,则 $-a<-1$,且 $\dfrac{a}{3}>1$,解得 $a>3$.

所以实数 a 的取值范围为 $(3,+\infty)$.