数学·高考版(理)

第 13 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

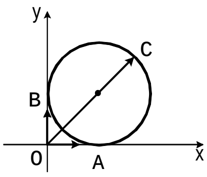
一、选择题

1.C　2.D　3.A　4.D　5.C　6.B

7.C　8.C　9.D　10.D　11.B

12.A

提示:如图,建立平面直角坐标系xOy,由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,可设 $\overrightarrow{OA}=a=(1,0)$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=(0,1)$,$\overrightarrow{OC}=(x,y)$,代入 $|c-a-b|=1$,得 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,即点 C 运动轨迹是以(1,1)为圆心,1 为半径的圆.又 $|c|=x^2+y^2$,故由几何性质,得 $\sqrt{1^2+1^2}-1\leqslant|c|\leqslant\sqrt{1^2+1^2}+1$,所以 $\sqrt{2}-1\leqslant|c|\leqslant\sqrt{2}+1$.



(第 12 题图)

二、填空题

13.-4　14.$\frac{5}{4}$　15.$\frac{9}{2}$

16.$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

提示:由题意得 A(2,0),B(0,1),

所以直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2}+y=1$,

且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\lambda(2,0)+\mu(0,1)=(2\lambda,\mu)$,

又 P 是区域 Ω 内的任意一点(包括边界),

所以 $\begin{cases}\frac{2\lambda}{2}+\mu\geqslant1,\\ \frac{(2\lambda)^2}{4}+\mu^2\leqslant1,\\ \lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,\end{cases}$

化简,得 $\begin{cases}\lambda+\mu\geqslant1,\\ \lambda^2+\mu^2\leqslant1,\\ \lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,\end{cases}$

所以点 M 所在的区域 Ω' 是由直线 $\lambda+\mu=1$,圆 $\lambda^2+\mu^2=1$ 在第一象限内所围成的弓形部分,所以动点 $M(\lambda,\mu)$ 所构成的区域 Ω' 的面积是 $\frac{\pi}{4}\times1^2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

三、解答题

17.(1)**解**:因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ 垂直,

又 $b-2c=(\sin\beta-2\cos\beta,4\cos\beta+8\sin\beta)$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=4\cos\alpha\sin\beta+4\sin\alpha\cdot\cos\beta-8\cos\alpha\cdot\cos\beta+8\sin\alpha\sin\beta=4\sin(\alpha+\beta)-8\cos(\alpha+\beta)=0$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=2$.

(2)**解**:由 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\sin\beta+\cos\beta,4\cos\beta-4\sin\beta)$,

得 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$

$=\sqrt{(\sin\beta+\cos\beta)^2+(4\cos\beta-4\sin\beta)^2}$

$=\sqrt{17-15\sin2\beta}\leqslant4\sqrt{2}$.

当 $\beta=-\frac{\pi}{4}$ 时,等号成立.

所以 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$.

18.**解**:(1)由已知条件易知 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB=2\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle AOC=2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$,$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$,所以 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})=9$,所以 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=3$.

(2)$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$,可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=m|\overrightarrow{OA}|^2+n\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$,

且 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+n|\overrightarrow{OB}|^2$,

所以 $\begin{cases}4m-3n=-4,\\ -3m+3n=0,\end{cases}$

解得 m=n=-4.

19.**解**:由 $|\overrightarrow{MF_1}|=|\overrightarrow{MF_2}|$,

可得 $|\overrightarrow{OF_1}-\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OF_2}-\overrightarrow{OM}|$,

即 $|(-e_1+0e_2)-(xe_1+ye_2)|$

$=|(e_1+0e_2)-(xe_1+ye_2)|$,

即 $|(-1-x)e_1-ye_2|=|(1-x)e_1-ye_2|$,

即 $|(-1-x)e_1-ye_2|^2=|(1-x)e_1-ye_2|^2$,

即 $(1+x)^2+y^2+2(1+x)ye_1\cdot e_2=(1-x)^2+y^2-2(1-x)ye_1\cdot e_2$,

即 $(1+x)^2+y^2+2(1+x)y\cos45°=(1-x)^2+y^2-2(1-x)y\cos45°$,

化简,得 $\sqrt{2}x+y=0$.

20.**解**:(1)因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x+4,y-2)$,

所以 $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=(-x-4,2-y)$.

又 $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{DA}$ 且 $\overrightarrow{BC}=(x,y)$,

所以 $x(2-y)-y(-x-4)=0$,

即 $x+2y=0$.　①

(2)因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x+6,y+1)$,

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x-2,y-3)$,

又 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,

即 $(x+6)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$.　②

联立①②,化简得 $y^2-2y-3=0$.

解得 y=3,或 y=-1.

故当 y=3 时,x=-6,

此时 $\overrightarrow{AC}=(0,4)$,$\overrightarrow{BD}=(-8,0)$,

所以 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=16$;

当 y=-1 时,x=2,

此时 $\overrightarrow{AC}=(8,0)$,$\overrightarrow{BD}=(0,-4)$,

所以 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=16$.

综上,x=-6,y=3,或 x=2,y=-1;

四边形 ABCD 的面积都为 16.

21.**解**:(1)因为 $x=\frac{\pi}{4}$,

所以 $a=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$b=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $a\cdot b=\frac{\sqrt{6}}{2}\times0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

而 $|a|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$,$|b|=\sqrt{0+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

(2)$c\cdot d=(\sin x,\cos x)\cdot(\sin x,\sin x)=\sin^2x+\sin x\cos x=\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{\sin2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sin2x-\cos2x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

所以当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,

即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时,$(c\cdot d)_{max}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

(3)$f(x)=(a-b)\cdot(c+d)=(\sqrt{3}\cos x,\cos x-\sin x)\cdot(2\sin x,\cos x+\sin x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x-\sin^2x=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,$g(x)=2\sin\left[2(x-s)+\frac{\pi}{6}\right]+t=2\sin\left(2x-2s+\frac{\pi}{6}\right)+t=2\sin2x+1$,所以 $t=1$,$s=\frac{\pi}{12}+k\pi$ $(k\in Z)$,所以 $|m|=\sqrt{s^2+t^2}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)^2+1}$.

所以 k=0 时,

$|m|_{min}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{12}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{\pi^2+144}}{12}$.

22.**解**:(1)由题意可得,直线 AB 的方程是 $y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$ 与 $y^2=2px$ 联立,消去 y,得 $4x^2-5px+p^2=0$,

所以 $x_1+x_2=\frac{5p}{4}$.

由抛物线定义,得 $|AB|=x_1+x_2+p=9$,

所以 p=4,从而抛物线的方程是 $y^2=8x$.

(2)由(1)知 $x^2-5x+4=0$,

从而 $x_1=1,x_2=4,y_1=-2\sqrt{2},y_2=4\sqrt{2}$,

从而 $A(1,-2\sqrt{2})$,$B(4,4\sqrt{2})$.

设 $\overrightarrow{OC}=(x_3,y_3)$,由 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$,

得 $\overrightarrow{OC}=(1,-2\sqrt{2})+\lambda(4,4\sqrt{2})=(4\lambda+1,4\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2})$,

又 $y_3^2=8x_3$,

即 $[2\sqrt{2}(2\lambda-1)]^2=8(4\lambda+1)$,

即 $(2\lambda-1)^2=4\lambda+1$,解得 $\lambda=0$,或 $\lambda=2$.

数学·高考版(理)

第14期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B　2.A　3.A　4.B　5.D　6.A
7.D　8.C　9.B　10.B　11.A
12.D

提示: $\tan\frac{\beta}{2}=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\beta}{4}\right)\right]=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\beta}{4}\right)-\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{4}\right)}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\beta}{4}\right)\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{4}\right)}=\frac{1}{m^2+3m+3}$,又 $m\geqslant-1$,所以 $m^2+3m+3=\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant1$,故 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{m^2+3m+3}\in(0,1]$.

二、填空题

13.$-\frac{12}{13}$　14.$-\frac{2}{3}$　15.$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$

16.$[\sqrt{3},+\infty)$

提示:依题意,得 $f(x)=3\sqrt{2}\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}+\sqrt{6}\cos^2\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}-m=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{x}{2}-m=\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-m\leqslant0$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上恒成立,

所以 $m\geqslant\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上恒成立.

由于 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{4}$,

所以 $-\sqrt{3}\leqslant\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{3}$,

故 $m\geqslant\sqrt{3}$.

三、解答题

17.**解**:(1)因为 $f(x)=A\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

且 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}$,

所以 $A\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=A\sin\frac{2\pi}{3}=A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$,所以 $A=\sqrt{3}$.

(2)因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

且 $f(\theta)+f(-\theta)=\frac{3}{2}$,

所以 $f(\theta)+f(-\theta)$

$=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

$=\sqrt{3}\left[\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)\right]$

$=\sqrt{3}\cdot2\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{6}\cos\theta=\frac{3}{2}$,

所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$,且 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

所以 $f\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\sin(\pi-\theta)=\sqrt{3}\sin\theta=\frac{\sqrt{30}}{4}$.

18.**解**:因为

$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{1}{4}\cos^2x-\frac{3}{4}\sin^2x=\frac{1+\cos2x}{8}-\frac{3-3\cos2x}{8}$

$=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}$,

所以 $g(x)=f(x)+\sin x=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}+\sin x=\frac{1}{2}(1-2\sin^2x)+\sin x-\frac{1}{4}=-\sin^2x+\sin x+\frac{1}{4}=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.

设 $t=\sin x$,$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,则 $t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以当 $t=-\frac{1}{2}$,即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时,

$g(x)$ 有最小值为 $-\frac{1}{2}$;

当 $t=\frac{1}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,$g(x)$ 有最大值为 $\frac{1}{2}$.

所以 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

19.**解**:(1)$f(x)=2A\cos^2\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)-A=A\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)-1\right]=A\cos\left(\frac{\pi}{3}x+2\varphi\right)$,

所以 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$.

将 $P(1,A)$ 代入得 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\varphi\right)=1\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$,

故 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

(2)设点 Q 的坐标为 $(x_0,-A)$,
由题意可知 $x_0-1=3$,
解得 $x_0=4$,所以 $Q(4,-A)$,
则 $|PQ|^2=(4-1)^2+(-A-A)^2=9+4A^2$.
又 $|RP|=A$,$|RQ|^2=(4-1)^2+(-A-0)^2=9+A^2$,

在△PRQ中,$\angle PRQ=\frac{2\pi}{3}$,

由余弦定理,得

$\cos\angle PRQ=\frac{|RP|^2+|RQ|^2-|PQ|^2}{2|RP|\cdot|RQ|}$

$=\frac{A^2+9+A^2-(9+4A^2)}{2A\cdot\sqrt{9+A^2}}=-\frac{1}{2}$,

解得 $A^2=3$.

又 $A>0$,所以 $A=\sqrt{3}$.

$S_{\triangle PRQ}=\frac{1}{2}RP\cdot RQ\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\cdot A\cdot\sqrt{9+A^2}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

20.**解**:(1)因为 $m=(2\sin B,\sqrt{3})$,

$n=\left(2\cos^2\frac{B}{2}-1,\cos2B\right)$,$m\perp n$,

所以 $2\sin B\left(2\cos^2\frac{B}{2}-1\right)+\sqrt{3}\cos2B=0$,

即 $\sin2B=-\sqrt{3}\cos2B$,
所以 $\tan2B=-\sqrt{3}$,
又 B 为锐角,所以 $2B\in(0,\pi)$,

所以 $2B=\frac{2\pi}{3}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=\sin2x\cos B-\cos2x\sin B$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$,

解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是

$\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in Z)$.

又由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$,得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$,

所以函数 $f(x)$ 的对称中心是点

$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$.

(2)由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$,$b=4$,由余弦定理,得

$16=a^2+c^2-ac$,
因为 $a^2+c^2\geqslant2ac$,
所以 $ac\leqslant16$(当且仅当 $a=c=4$ 时,等号成立),

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant4\sqrt{3}$(当且仅当 $a=c=4$ 时等号成立),所以△ABC的面积的最大值为 $4\sqrt{3}$.

21.**解**:(1)由条件得 $A=2$,$\frac{T}{4}=3$,所以 $T=12$,

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=\frac{\pi}{6}$.

所以曲线段 FBC 的解析式为

$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)$,$x\in[-4,0]$.

当 $x=0$ 时,$y=OC=\sqrt{3}$,

又 $CD=\sqrt{3}$,

所以 $\angle COD=\frac{\pi}{4}$,即 $\angle DOE=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)易知 $OD=\sqrt{6}$,当“矩形草坪”的面积取最大值时,点 P 在弧 DE 上,故 $OP=\sqrt{6}$.

由题意可知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,

所以“矩形草坪”的面积为
$S=\sqrt{6}\sin\theta(\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta)$
$=6(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$

$=6\left(\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-3$,

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,所以因为 $\frac{\pi}{4}<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$,

故当 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 时,

“矩形草坪”的面积最大.

22.(1)**解**:将 $g(x)=\cos x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的2倍(横坐标不变),得到 $y=2\cos x$ 的图象,再将 $y=2\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象,故 $f(x)=2\sin x$,所以函数 $f(x)=2\sin x$ 图象的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$.

(2)①**解**:$f(x)+g(x)=2\sin x+\cos x$

$=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right)$

$=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$(其中 $\tan\varphi=\frac{1}{2}$).

依题意,$\sin(x+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$ 在区间 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α,β 当且仅当 $\left|\frac{m}{\sqrt{5}}\right|<1$,

解得 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$,

故 m 的取值范围是 $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$.

②**证明**:因为 α,β 是方程 $\sqrt{5}\sin(x+\varphi)=m$ 在区间 $[0,2\pi)$ 内的两个不同的解,

所以 $\sin(\alpha+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$,$\sin(\beta+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$.

当 $1\leqslant m<\sqrt{5}$ 时,$\alpha+\beta=2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$,

即 $\alpha-\beta=\pi-2(\beta+\varphi)$;

当 $-\sqrt{5}<m<1$ 时,$\alpha+\beta=2\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$,

即 $\alpha-\beta=3\pi-2(\beta+\varphi)$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\cos2(\beta+\varphi)=2\sin^2(\beta+\varphi)-1=2\left(\frac{m}{\sqrt{5}}\right)^2-1=\frac{2m^2}{5}-1$.

数学·高考版(理)

第 15 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.A　4.A　5.B　6.B

7.A　8.B　9.B　10.D　11.B

12.A

提示:由 $a\cos B=b(1+\cos A)$结合正弦定理,得 $\sin A\cos B=\sin B(1+\cos A)$,

$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$,

$\sin(A-B)=\sin B$.

因为△ABC 是锐角三角形,

所以 $A-B=B$,即 $A=2B$.

所以 $2B<90°$,$B<45°$;$A+B=3B>90°$,$B>30°$,所以 $30°<B<45°$,$45°<C<90°$.

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=2$,所以 $ab=\frac{4}{\sin C}$,

所以$(c+a-b)(c+b-a)=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2-b^2+2ab=-2ab\cos C+2ab=\frac{8}{\sin C}(1-\cos C)=\frac{8\times 2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=8\tan\frac{C}{2}$.

因为 $45°<C<90°$,所以 $\sqrt{2}-1<\tan\frac{C}{2}<1$,

所以$(c+a-b)(c+b-a)\in(8\sqrt{2}-8,8)$.

故选 A.

二、填空题

13.$\sqrt{6}-\sqrt{2}$　14.$\left(2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

15.(2,8)

16.60

提示:$AB=\frac{46}{\sin 67°}$.在△ABC 中,由正弦定理,可知 $\frac{AB}{\sin 30°}=\frac{BC}{\sin 37°}$,所以 $BC=\frac{AB\sin 37°}{\sin 30°}=\frac{46\cdot\sin 37°}{\sin 67°\cdot\sin 30°}\approx 60$.

三、解答题

17.解:(1)在△ABC 中,由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

可得 $a\sin B=b\sin A$.

又由 $a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$,

得 $2a\sin B\cos B=\sqrt{3}b\sin A=\sqrt{3}a\sin B$,

所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)由 $\cos A=\frac{1}{3}$,可得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

18.解:(1)因为 $c\left(b\cos A-\frac{a}{2}\right)=b^2-a^2$,

所以 $2bc\cos A-ac=2(b^2-a^2)$,

所以 $b^2+c^2-a^2-ac=2(b^2-a^2)$,

所以 $a^2+c^2-b^2=ac$.

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$.

又 $0<B<\pi$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)在△ABD 中,由余弦定理,得

$\left(\frac{\sqrt{129}}{2}\right)^2=c^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2c\cdot\frac{b}{2}\cos A$,

所以 $\frac{129}{4}=c^2+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{7}bc$.　①

在△ABC 中,由正弦定理,得

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$.

由已知,得

$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,

所以 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{5}{7}b$.　②

由①②解得$\begin{cases}b=7,\\c=5.\end{cases}$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{3}$.

19.解:(1)因为 $C=\pi-(A+B)$,

所以 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=-1$.

又因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{3\pi}{4}$.

(2)因为 $C=\frac{3\pi}{4}$,

所以 AB 边最大,即 $AB=\sqrt{17}$.

又因为 $\tan A<\tan B$,$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以角 A 最小,BC 边为最小边.

由$\begin{cases}\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{4},\\\sin^2A+\cos^2A=1,\end{cases}$且 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

得 $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$.由 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$,得

$BC=AB\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$.

所以最小边 BC 的长为$\sqrt{2}$.

20.解:(1)在△ABC 中,根据余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,而 $A\in(0,\pi)$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)$f(x)=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(B)=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$,所以当 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,

即 $B=\frac{\pi}{6}$ 时,$f(B)$取最大值,

此时 $C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,

所以△ABC 是直角三角形.

21.解:(1)设小艇与轮船在 B 处相遇,相遇时小艇航行的距离为 s 海里,如图所示.在△AOB 中,$A=90°-30°=60°$,

所以 $s=\sqrt{900t^2+400-2\times 30t\times 20\times\cos 60°}$

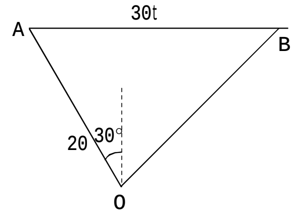
$=\sqrt{900t^2-600t+400}$

$=\sqrt{900\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+300}$.

故当 $t=\frac{1}{3}$ 时,$s_{\min}=10\sqrt{3}$(海里),

此时 $v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}$(海里/小时).

即小艇以 $30\sqrt{3}$ 海里/小时的速度航行,相遇时小艇的航行距离最短.



(第 21 题图)

(2)由题意可知 OB=vt,在△AOB 中,由余弦定理,得

$v^2t^2=400+900t^2-2\times 20\times 30t\cos 60°$,

故 $v^2=900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2}$.

因为 $0<v\leqslant 30$,

所以 $900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2}\leqslant 900$.

即 $\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t}\leqslant 0$,解得 $t\geqslant\frac{2}{3}$.又 $t=\frac{2}{3}$ 时,$v=30$,故 $v=30$ 时,t 取得最小值,且最小值等于$\frac{2}{3}$.

此时,在△OAB 中,有 OA=OB=AB=20,故可设计航行方案如下:航行方向为北偏东 30°,航行速度为 30 海里/小时,小艇能以最短时间与轮船相遇.

22.解:(1)

$f(x)=2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$=\sqrt{3}(1+\cos x)-\sin x$

$=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

由 $2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=\sqrt{3}+1$,

得 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

于是 $\theta+\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in Z)$,

因为 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{6}$.

(2)因为 $C\in(0,\pi)$,

由(1)知,$C=\frac{\pi}{6}$.

因为△ABC 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{6}$,

于是 $ab=2\sqrt{3}$.　①

在△ABC 中,设内角 A、B 的对边分别是 a,b.

由余弦定理,得 $1=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{6}=a^2+b^2-6$,所以 $a^2+b^2=7$.　②

由①②可得$\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$或$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\b=2.\end{cases}$

于是 $a+b=2+\sqrt{3}$.

由正弦定理,得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{1}=\frac{1}{2}$,所以 $\sin A+\sin B=\frac{1}{2}(a+b)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

数学·高考版(理)

第 16 期

第 2~3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C　2.A　3.A　4.B　5.B　6.B

7.B　8.B　9.D　10.C　11.B

12.C

提示：由递推公式变形，得

$3(a_{n+1}-1)=-(a_n-1)$，

又 $a_1-1=9-1=8$，

所以数列$\{a_n-1\}$是以 8 为首项，$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

所以 $a_n-1=8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

所以$|S_n-n-6|=|a_1-1+a_2-1+\cdots+a_n-1-6|$

$=\left|\frac{8\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{3}}-6\right|=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{125}$，

化简，得 $3^{n-1}>250$，$n>1+\log_3 250$，

所以满足条件的 n 的最小值为 7.

二、填空题

13.1　14.1024　15.91

16.$\frac{2n}{n+1}$

提示：由题意，$a_1=1$，当 $x\in(n,n+1]$时，$\{x\}=n+1$，$x\cdot\{x\}\in(n^2+n,n^2+2n+1]$，$\{x\cdot\{x\}\}$的取值依次为 n^2+n+1，n^2+n+2，$\cdots$，n^2+2n+1，共 $n+1$ 个，即 $a_{n+1}=a_n+n+1$，由此可得 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{2n}{n+1}$.

三、解答题

17.**解：**(1)因为数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$是首项为 9，公比为 3 的等比数列，

所以 $a_{n+1}-3a_n=9\times3^{n-1}=3^{n+1}$，

所以 $a_2-3a_1=9$，$a_3-3a_2=27$，

又 $a_1=1$，所以 $a_2=12$，$a_3=63$.

(2)因为 $a_{n+1}-3a_n=3^{n+1}$，所以$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=1$，所以数列$\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$是首项为$\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3}$，公差等于 1 的等差数列，所以数列$\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3n^2-n}{6}$.

18.**解：**(1)设$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$，由题意，得 $a_5^2=a_2a_6$，

即$(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$，

化简，得 $2a_1d+11d^2=0$.

又 $a_1=11$，所以 $d=-2$，或 $d=0$(舍去)，

故 $a_n=-2n+13$.

(2)由(1)知当 $n\leqslant6$ 时，$a_n>0$；

当 $n\geqslant7$ 时，$a_n<0$.

当 $n\leqslant6$ 时，$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=12n-n^2$.

当 $n\geqslant7$ 时，

$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_6|+|a_7|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6-(a_7+a_8+\cdots+a_n)=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2S_6-\left[na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right]=72-(12n-n^2)=n^2-12n+72$.

所以 $S_n=\begin{cases}12n-n^2, n\leqslant6,\\ n^2-12n+72, n\geqslant7.\end{cases}$

19.(1)**证明：**因为 $a_n+a_{n+1}=2n(n\in\mathbf{N}_+)$，　①

所以 $a_{n+1}+a_{n+2}=2(n+1)(n\in\mathbf{N}_+)$，　②

②-①，得 $a_{n+2}-a_n=2(n\in\mathbf{N}_+)$.

所以$\{a_n\}$是公差为 2 的准等差数列.

(2)**解：**由已知 $a_1=a$，$a_n+a_{n+1}=2n(n\in\mathbf{N}_+)$，

所以 $a_1+a_2=2\times1$，即 $a_2=2-a$.

所以由(1)得 $a_1,a_3,a_5,\cdots$成以 a 为首项，2 为公差的等差数列；$a_2,a_4,a_6,\cdots$成以 $2-a$ 为首项，2 为公差的等差数列.

当 n 为偶数时，$a_n=2-a+\left(\frac{n}{2}-1\right)\times2=n-a$；当 n 为奇数时，$a_n=a+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\times2=n+a-1$.

所以 $a_n=\begin{cases}n+a-1, n\text{ 为奇数},\\ n-a, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

$S_{20}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{19}+a_{20})=2\times1+2\times3+\cdots+2\times19=2\times\frac{(1+19)\times10}{2}=200$.

20.**解：**(1)因为 S_1+a_1，S_3+a_3，S_2+a_2 成等差数列，

所以 $2(S_3+a_3)=(S_1+a_1)+(S_2+a_2)$，

所以$(S_3-S_1)+(S_3-S_2)+2a_3=a_1+a_2$，所以 $4a_3=a_1$.

因为数列$\{a_n\}$是等比数列，所以$\frac{a_3}{a_1}=\frac{1}{4}=q^2$.

又 $q>0$，所以 $q=\frac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)因为 $T_n\geqslant m$ 恒成立，

所以只需$(T_n)_{\min}\geqslant m$ 即可.

由(1)知 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，又 $a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_nb_n}$，

所以 $b_n=n\cdot2^{n-1}$.

因为 $T_n=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}$，

$2T_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，

两式相减得 $-T_n=1\cdot2^0+(2-1)\cdot2^1+(3-2)\cdot2^2+\cdots+[n-(n-1)]\cdot2^{n-1}-n\cdot2^n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^n=(1-n)\cdot2^n-1$，

故 $T_n=(n-1)\cdot2^n+1$.

所以 $T_{n+1}=n\cdot2^{n+1}+1$.

因为 $T_{n+1}-T_n=(n\cdot2^{n+1}+1)-[(n-1)\cdot2^n+1]=(n+1)\cdot2^n>0$，所以 $T_{n+1}>T_n$.

所以$\{T_n\}$是递增数列，所以$(T_n)_{\min}=T_1=1$，

所以 $m\leqslant1$.

所以 m 的最大值为 1.

21.(1)**解：**由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$，得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

因为$\{a_n\}$是正项数列，

所以 $S_n>0$，所以 $S_n=n^2+n$.

于是 $a_1=S_1=2$，$n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.

当 $n=1$ 时，也满足上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n$.

(2)**证明：**由于 $a_n=2n$，$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$，则 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

22.(1)**证明：**因为 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n^2}{4a_n^2+1}}$，

所以 $a_{n+1}^2=\frac{a_n^2}{4a_n^2+1}$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}^2}=\frac{4a_n^2+1}{a_n^2}=\frac{1}{a_n^2}+4$，

即$\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}=4$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$为以 1 为首项，4 为公差的等差数列.

所以$\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{a_1^2}+(n-1)\cdot4=4n-3$，

所以 $a_n^2=\frac{1}{4n-3}$.

又由题知 $a_n>0$，所以 $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**解：**因为 $b_n=S_{2n+1}-S_n$，所以 $b_{n+1}=S_{2n+3}-S_{n+1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=(S_{2n+3}-S_{2n+1})-(S_{n+1}-S_n)$

$=a_{2n+3}^2+a_{2n+2}^2-a_{n+1}^2$

$=\frac{1}{8n+9}+\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{4n+1}$

$=-\frac{40n+31}{(8n+9)(8n+5)(4n+1)}<0$，

所以 $b_{n+1}<b_n$，即数列$\{b_n\}$为递减数列，

则要使 $b_n<\frac{m}{25}$ 恒成立，只需 $b_1<\frac{m}{25}$.

因为 $b_1=S_3-S_1=a_2^2+a_3^2=\frac{14}{45}$，

所以$\frac{14}{45}<\frac{m}{25}$，所以 $m>\frac{70}{9}$.

所以存在最小的正整数 $m=8$，使对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，有 $b_n<\frac{m}{25}$ 成立.