数学·高考版(理)

第7期

第2~3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.A　3.B　4.D　5.C　6.D
7.D　8.D　9.A　10.D　11.D
12.A

提示：由题意，知函数f(x)的定义域为(0,+∞)，且$f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$.因为存在垂直于y轴的切线，故此时斜率为0，问题转化为在(0,+∞)内导函数$f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$存在零点.再将之转化为$g(x)=-2ax$与$h(x)=\frac{1}{x}$存在交点.当a=0时，不符合题意；当a>0时，如图1，可知显然没有交点；当a<0时，如图2，此时正好有一个交点，故a<0满足题意，故选A.

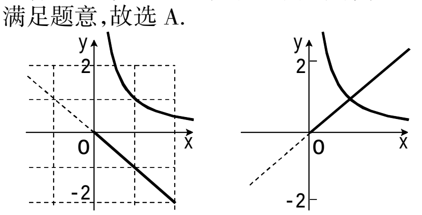

图1　　图2

（第12题图）

二、填空题

13.3　14.0　15.$\frac{\pi}{4}$

16.①②④

提示：由导函数的图象可知，当$-1<x<0$和$2<x<4$时，$f'(x)>0$，函数f(x)单调递增；当$0<x<2$和$4<x<5$时，$f'(x)<0$，函数f(x)单调递减.当$x=0$及$x=4$时，函数取得极大值$f(0)=2$，$f(4)=2$；当$x=2$时，函数取得极小值$f(2)=1.5$.又$f(-1)=f(5)=1$，所以函数的最大值为2，最小值为1，值域为[1,2]，①②正确；因为当$x=0$及$x=4$时，函数取得极大值$f(0)=2$，$f(4)=2$，要使当$x\in[-1,t]$时，函数$f(x)$的最大值是2，则$0\leq t\leq 5$，所以t的最大值为5，所以③不正确；因为极小值$f(2)=1.5$，极大值$f(0)=f(4)=2$，所以当$1<a<2$时，$y=f(x)-a$最多有4个零点，所以④正确，所以正确命题的序号为①②④.

三、解答题

17.**解**：(1)化简，得$f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为$f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$
$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$，

所以$f'(2)=0$.

(2)因为$f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$
$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$，

所以$f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**：(1)$f'(x)=3x^2-3$.
因为P为切点，
所以直线l的斜率$k_1=f'(1)=0$，
所以所求直线l的方程为$y=-2$.
(2)设切点坐标为$(x_0,x_0^3-3x_0)(x_0\neq 1)$，
则直线l的斜率$k_2=f'(x_0)=3x_0^2-3$，
所以直线l的方程为
$y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.
又直线l过点$P(1,-2)$，
所以$-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，
解得$x_0=1$(舍去)或$x_0=-\frac{1}{2}$.

故所求直线l的斜率$k_2=3x_0^2-3=-\frac{9}{4}$，
所以直线l的方程为
$y-(-2)=-\frac{9}{4}(x-1)$，
即$y=-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}$.

19.(1)**解**：函数f(x)的定义域为(0,+∞)，$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$，
由题意可得f(1)=2，f′(1)=e，
则$\begin{cases}b=2,\\ ae-b+b=e,\end{cases}$解得a=1，b=2.
(2)**证明**：由(1)，知$f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$，
从而f(x)>1等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.
设函数$g(x)=x\ln x$，则$g'(x)=1+\ln x$，
所以当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$；
当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$.
故g(x)在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，
在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，
从而g(x)在(0,+∞)上的最小值为$g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.
设函数$h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，
则$h'(x)=e^{-x}(1-x)$.
所以当$x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$；
当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，
故h(x)在(0,1)上单调递增，
在(1,+∞)上单调递减，
从而h(x)在(0,+∞)上的最大值为$h(1)=-\frac{1}{e}$.
综上，当x>0时，g(x)>h(x)，即f(x)>1.

20.**解**：(1)因为函数$f(x)=\frac{a(x-1)}{x^2}$，
所以
$f'(x)=\frac{[a(x-1)]'\cdot x^2-(x^2)'a(x-1)}{x^4}=\frac{a(2-x)}{x^3}$.
由$f'(x)>0$，得$0<x<2$；
由$f'(x)<0$，得$x<0$，或$x>2$.
所以函数$f(x)$的单调递增区间为(0,2)，单调递减区间为(-∞,0)，(2,+∞).
(2)设切点为(x,y)，
由切线斜率$k=1=\frac{a(2-x)}{x^3}$，
得$x^3=-ax+2a$.①
由$x-y-1=x-\frac{a(x-1)}{x^2}-1=0$，
得$(x^2-a)(x-1)=0$.
解得$x=1$，或$x=\sqrt{a}$，或$x=-\sqrt{a}$.
把$x=1$代入①，得$a=1$；
把$x=\sqrt{a}$代入①，得$a=1$；
把$x=-\sqrt{a}$代入①，方程无解.
故所求实数a的值为1.
(3)因为$g(x)=x\ln x-x^2f(x)=x\ln x-a(x-1)$，
所以$g'(x)=\ln x+1-a$.
令$\ln x+1-a=0$，得$x=e^{a-1}$，
所以$g(x)$在区间$(e^{a-1},+\infty)$上单调递增，在区间$(0,e^{a-1})$上单调递减.
①当$e^{a-1}\leq 1$，即$0<a\leq 1$时，$g(x)$在区间[1,e]上单调递增，其最小值为$g(1)=0$；
②当$1<e^{a-1}<e$，即$1<a<2$时，$g(x)$的最小值为$g(e^{a-1})=a-e^{a-1}$；
③当$e^{a-1}\geq e$，即$a\geq 2$时，$g(x)$在区间[1,e]上单调递减，其最小值为$g(e)=e+a-ae$.

21.(1)**解**：函数$f(x)$的定义域为(0,+∞).
因为$f'(x)=\frac{a}{x}+x-(a+1)=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$，
又因为函数$f(x)$在(1,3)上单调递减，
所以不等式$(x-1)(x-a)\leq 0$在(1,3)上成立.
设$g(x)=(x-1)(x-a)$，则$g(3)\leq 0$，
即$2(3-a)\leq 0$，解得$a\geq 3$.
所以a的取值范围是[3,+∞).
(2)**证明**：当$a=-1$时，$f(x)=-\ln x+\frac{x^2}{2}$，
$f'(x)=-\frac{1}{x}+x=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.
令$f'(x)=0$，得$x=1$，或$x=-1$(舍去).
当x变化时，$f(x)$，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	(0,1)	1	(1,+∞)
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘	极小值	↗

所以$x=1$时，
函数$f(x)$取得极小值，也是最小值，为$f(1)=\frac{1}{2}$.
所以$f(x)\geq\frac{1}{2}$成立.

22.**解**：(1)当a=2时，$g(x)=4x^2-\ln x+2$，
则$g'(x)=8x-\frac{1}{x}$.
曲线y=g(x)在点(1,g(1))处的切线斜率k=g′(1)=7，又g(1)=6，
曲线y=g(x)在点(1,g(1))处的切线的方程为y-6=7(x-1)，即y=7x-1.
(2)设函数$h(x)=f(x)-g(x)=ax+\ln x-a^2x^2(x>0)$.
假设存在负数a，使得f(x)≤g(x)对一切正数x都成立.
即当x>0时，$[h(x)]_{max}\leq 0$.
$h'(x)=a+\frac{1}{x}-2a^2x=\frac{-2a^2x^2+ax+1}{x}(x>0)$.
令h′(x)=0，可得$x_1=-\frac{1}{2a}$，$x_2=\frac{1}{a}$(舍去).
当$0<x<-\frac{1}{2a}$时，h′(x)>0，h(x)单调递增；
当$x>-\frac{1}{2a}$时，h′(x)<0，h(x)单调递减.
所以h(x)在$x=-\frac{1}{2a}$处有极大值，也是最大值.
所以$[h(x)]_{max}=h\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-\frac{3}{4}\leq 0$，
解得$a\leq-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.
所以存在负数a，满足题意，a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}\right]$.