数学·人教A(必修2)

第9期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.D　3.B　4.B

5.D

提示:该直线与两坐标轴所围成的三角形是等腰直角三角形,其外接圆的直径的两端点坐标分别为(2,0),(0,2),得圆心的坐标为(1,1),半径长为$\sqrt{2}$.

6.C

提示:由题意,得两个圆内切或外切.当两圆内切时,$|a|=1$;当两圆外切时,$|a|=3$,所以实数a的所有取值集合是$\{1,-1,3,-3\}$.

7.C

提示:直线AB的垂直平分线就是两圆的圆心连线.易知两圆的圆心分别为$(2,-3)$和$(3,0)$,则其直线方程为$3x-y-9=0$.故选C.

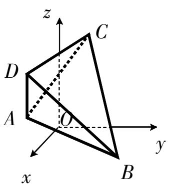
8.A

提示:由题意,得点$M(2,-3,-5)$,点$Q(1,-2,-3)$,

则$|MQ|=\sqrt{(2-1)^2+(-3+2)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{6}$.

9.A

提示:根据题意,画出四面体$ABCD$如图所示,则该四面体在yOz平面的投影是点$\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$,$(0,1,0)$,$\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,$(0,0,1)$组成的平面图形,且$BD$的投影是实线,$AC$的投影是虚线,故选A.



(第9题图)

10.B

提示:直线过圆心$(-1,2)$,则$a+b=1$.

11.A

提示:由题意,知点M在以$C_1(-6,5)$为圆心,半径$r_1=2$的圆上;点N在以$C_2(2,1)$为圆心,半径$r_2=1$的圆上.作圆C_1关于x轴对称的圆A,则$A(-6,-5)$,半径$r=2$.易知$|PM|+|PN|$的最小值为$|AC_2|-r_1-r_2=10-2-1=7$.

12.C

提示:曲线方程可化简为$(x-2)^2+(y-3)^2=4(1\leqslant y\leqslant 3)$,即表示圆心为$(2,3)$,半径长为2的半圆.当直线$y=x+b$与此半圆相切时需满足圆心$(2,3)$到直线$y=x+b$的距离等于2,解得$b=1+2\sqrt{2}$,或$b=1-2\sqrt{2}$.由于是下半圆,故将$b=1+2\sqrt{2}$舍去.又直线过点$(0,3)$时,将点代入直线得$b=3$,依据数形结合,故$1-2\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 3$,所以C正确.

二、填空题

13.过点$(1,1,0)$且与xOy平面垂直的一条直线

14.$(0,2\sqrt{5})$

提示:$r<d=\dfrac{|2\times(-4)+3-5|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

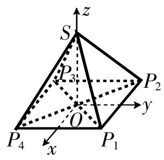
15.$x-2y-1=0(x\neq 1)$

提示:圆心为$(2m+1,m)$,$r=|m|(m\neq 0)$.令$x=2m+1$,$y=m$,消去m即得圆心的轨迹方程.

16.$7x-24y+45=0$

三、解答题

17.**解**:根据题意作出图形(如图).



(第17题图)

因为$|P_1P_2|=a$,而点P_1,P_2,P_3,P_4均在xOy平面上,

所以点$P_1\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$,$P_2\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$.

因为点P_3与点P_1关于点O对称,点P_4与点P_2关于点O对称,

所以点$P_3\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$,$P_4\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$.

在$\mathrm{Rt}\triangle SOP_1$中,

因为$|SP_1|=a$,$|OP_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以$|SO|=\sqrt{|SP_1|^2-|OP_1|^2}$

$=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

故点S的坐标为$\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.

18.**解**:设所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$,即$x^2+y^2-4x-2y+5-r^2=0$.

与已知圆$x^2+y^2-3x=0$的方程相减,得公共弦所在直线的方程为$x+2y-5+r^2=0$.

因为此直线过点$(5,-2)$,

所以$5-4-5+r^2=0$,得$r^2=4$.

所以所求圆的方程为

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

19.**解**:(1)若点$M(6,9)$在圆N上,则$(6-5)^2+(9-6)^2=a^2(a>0)$,解得$a=\sqrt{10}$.

(2)若线段PQ(不含端点)与圆N有且只有一个公共点,则点P,Q必有一点在圆N内,一点在圆N外.

因为$|PN|=\sqrt{13}$,$|QN|=3$,

所以$3<a<\sqrt{13}$.

所以实数a的取值范围是$(3,\sqrt{13})$.

20.**解**:(1)设$C(x,y)$,

则$k_{AC}=\frac{y}{x+1}$,$k_{BC}=\frac{y}{x-3}$.

因为$AC\perp BC$,所以$k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$,即$\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-3}=-1$,化简,得$x^2+y^2-2x-3=0$.

由于A,B,C不共线,故$y\neq 0$.

故直角顶点C的轨迹方程是$x^2+y^2-2x-3=0(y\neq 0)$.

(2)设$M(x,y)$,$C(x_1,y_1)$.

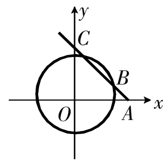
由(1),知$(x_1-1)^2+y_1^2=4(y_1\neq 0)$.　①

因为$B(3,0)$,M为BC的中点,所以$x=\frac{x_1+3}{2}$,$y=\frac{y_1}{2}$,即$x_1=2x-3$,$y_1=2y$.

代入①式,得$(2x-4)^2+(2y)^2=4(y\neq 0)$,即$(x-2)^2+y^2=1(y\neq 0)$,此即为点$M$的轨迹方程.

21.**解**:如图,以该岛为原点,正东、正北方向分别为x轴、y轴正方向,建立平面直角坐标系,则雷达最大观测范围是一个圆,其方程为$x^2+y^2=200^2$,外国测量船的航行路线所在直线的方程为$x+y=250$,海岛到外国测量船的航行路线的距离为$d=\frac{|250|}{\sqrt{1^2+1^2}}=125\sqrt{2}$.

故航行路线被圆截得的弦$|BC|=2\sqrt{200^2-(125\sqrt{2})^2}=50\sqrt{14}$,所以能观测到的时间为$t=\frac{50\sqrt{14}}{20}=\frac{5\sqrt{14}}{2}$(小时).



(第21题图)

22.**解**:(1)圆O的圆心为$O(0,0)$,半径长$r_1=2$;圆C的圆心为$C(0,4)$,半径长$r_2=1$.

因为圆心距$|OC|=|4-0|>r_1+r_2=3$,

所以圆O与圆C相离.

(2)显然切线l的斜率存在.设切线l的方程为$y=kx+4$,即$kx-y+4=0$,

则有$\frac{|0+0+4|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得$k=\pm\sqrt{3}$.

所以切线l的方程为$\sqrt{3}x-y+4=0$,或$\sqrt{3}x+y-4=0$.

(3)当直线m的斜率不存在时,直线m的方程为$x=0$,其与圆O的交点为$A(0,2)$,$B(0,-2)$,则以AB为直径的圆即为圆O,而点$M(2,0)$在圆O上,所以圆O满足要求.

当直线m的斜率存在时,

设直线m的方程为:$y=kx+4$.

由$\begin{cases}y=kx+4,\\x^2+y^2=4,\end{cases}$消去$y$并整理,

得$(1+k^2)x^2+8kx+12=0$,

则$\Delta=64k^2-48(1+k^2)=16(k^2-3)>0$.①

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-\frac{8k}{1+k^2}$,$x_1x_2=\frac{12}{1+k^2}$.

所以$y_1+y_2=kx_1+4+kx_2+4=k(x_1+x_2)+8=\frac{8}{1+k^2}$,$y_1y_2=(kx_1+4)(kx_2+4)=k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+16=\frac{16-4k^2}{1+k^2}$.

若存在以AB为直径的圆P经过点$M(2,0)$,则$MA\perp MB$,所以$k_{MA}\cdot k_{MB}=-1$,

即$\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=-1$.

所以$x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$,

即$\frac{12}{1+k^2}+\frac{16k}{1+k^2}+4+\frac{16-4k^2}{1+k^2}=0$.

解得$k=-2$,满足①式.

此时以AB为直径的圆的方程为$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$,即$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-\frac{8}{5}y+\frac{12}{5}=0$.

综上,存在圆P:$x^2+y^2=4$或$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-\frac{8}{5}y+\frac{12}{5}=0$满足要求.

数学·人教 A(必修 2)

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

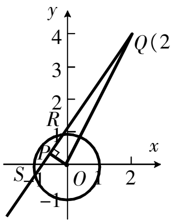
一、选择题

1.A　2.D　3.B　4.C　5.A

6.D　7.D　8.D　9.D　10.A　11.C

12.C

提示:如图所示,因为点 P 是弦 RS 的中点,所以 $OP\perp PQ$.又 $|OQ|$ 是定值,所以点 P 在以 OQ 为直径的圆上,此圆的圆心为 $(1,2)$,半径长为 $\frac{\sqrt{20}}{2}$,所以方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$,即 $x^2+y^2-2x-4y=0$.显然点 P 的轨迹是一段弧,由此可知选 C.



(第 12 题图)

二、填空题

13.$(3,-3,-1)$

14.$(x-2)^2+(y+2)^2=1$

15.$[8,10]$

16.$2x+y=0$

提示:圆 C 的圆心为 $C(3-m,2m)$.

令 $\begin{cases}x=3-m,\\y=2m,\end{cases}$ 消去 m,

得圆心 C 在直线 $2x+y-6=0$ 上.

若对任意的实数 m,直线 l 被圆 C 截得的弦长都是定值,则直线 l 与圆心所在直线平行.

所以设直线 l 的方程为 $2x+y+c=0$,

将点 $(-1,2)$ 代入,得 $c=0$.

所以直线 l 的方程为 $2x+y=0$.

三、解答题

17.**解**:(1)设点 $P(x,y)$,$M(x_0,y_0)$,则 $x_0^2+y_0^2=4$.由中点坐标公式,得 $\begin{cases}2x=x_0+4,\\2y=y_0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x_0=2x-4,\\y_0=2y.\end{cases}$

所以 $(2x-4)^2+4y^2=4$.

化简,得 $(x-2)^2+y^2=1$,

即为点 P 的轨迹方程.

(2)由(1)知,点 P 的轨迹是以 $C(2,0)$ 为圆心,半径长等于 1 的圆.

因为圆心 C 到直线 $3x+4y-86=0$ 的距离 $d=\frac{|3\times2+0-86|}{5}=16$,

所以点 P 到该直线的距离的最大值为 $16+1=17$,最小值为 $16-1=15$.

18.**解**:设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

将点 A,B,D 的坐标依次代入,

得 $\begin{cases}2D+2E+F+8=0,\\5D+3E+F+34=0,\\6D+F+36=0.\end{cases}$

解得 $D=-8$,$E=-2$,$F=12$.

所以圆的方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$.

将点 C 的坐标代入上述方程,得左边=右边,所以点 C 也在该圆上.

所以四边形 $ABCD$ 外接圆的方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$.

19.**解**:(1)将两圆方程相减,得公共弦 AB 所在直线的方程为 $x-2y+4=0$.

(2)由 $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y-8=0,\\x^2+y^2-2x+10y-24=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-4,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=2.\end{cases}$

所以 $A(-4,0)$,$B(0,2)$,中点为 $(-2,1)$.

所以 AB 的垂直平分线的方程为 $2x+y+3=0$.由圆的几何性质,知圆心在此直线上.

又圆心在直线 $y=-x$ 上,

由 $\begin{cases}2x+y+3=0,\\y=-x,\end{cases}$ 解得 $x=-3$,$y=3$.

所以圆心为 $M(-3,3)$,

半径长为 $|MA|=\sqrt{10}$.

所以圆心在直线 $y=-x$ 上,且经过 A,B 两点的圆的方程为 $(x+3)^2+(y-3)^2=10$.

(3)当 AB 为直径时,所得圆的面积最小.

由 $A(-4,0)$,$B(0,2)$,

得圆心为 $(-2,1)$,

半径长为 $\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}$.

所以经过 A,B 两点且面积最小的圆的方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$.

20.**解**:设 M,N 分别为 AB,BC 的中点,以 O 为原点,OM,ON,OS 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示空间直角坐标系,

则 $A\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$,$B\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$,

$C\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$,$D\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$,

$|OC|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

因为 $|SO|=\sqrt{|SC|^2-|OC|^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,所以 $S\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.因为 E 为 SC 的中点,所以 $E\left(-\frac{a}{4},\frac{a}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$.

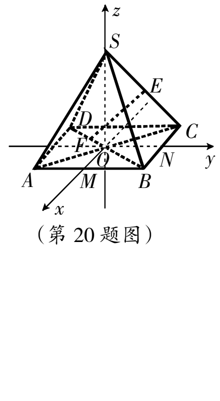
因为在 xOy 平面内 BD 所在直线的方程为 $y=x$,

所以可假设在 BD 上存在一点 $F(x,x,0)$,其中 $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$,使得 $|EF|=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

由两点间的距离公式,得

$\sqrt{\left(-\frac{a}{4}-x\right)^2+\left(\frac{a}{4}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,解得 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}a\in\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$.

故在线段 BD 上存在点 $F\left(\frac{\sqrt{6}}{12}a,\frac{\sqrt{6}}{12}a,0\right)$ 或 $F\left(-\frac{\sqrt{6}}{12}a,-\frac{\sqrt{6}}{12}a,0\right)$ 满足题意.



(第 20 题图)

21.**解**:(1)依题意,可设动圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$,其中圆心 (a,b) 满足 $a-b+10=0$.　①

又因为动圆 C 过点 $(-5,0)$,

故 $(-5-a)^2+(0-b)^2=25$.　②

联立①②,

解得 $a=-10,b=0$,或 $a=-5,b=5$.

故圆 C 的方程为 $(x+10)^2+y^2=25$,或 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$.

(2)圆 O 的圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$.

当 r 满足 $r+5<d$ 时,动圆 C 中不存在与圆 O 相切的圆;

当 r 满足 $r+5=d$,即 $r=5\sqrt{2}-5$ 时,动圆 C 中有且仅有 1 个圆与圆 O 相外切;

当 r 满足 $r+5>d$ 时,与圆 O 相外切的圆有两个.

综上,存在 $r=5\sqrt{2}-5$,使得动圆 C 中满足与圆 O 相外切的圆有且仅有一个.

22.**解**:以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,建立平面直角坐标系.

(1)因为 $AB=18$,$AD=6$,

所以半圆的圆心为 $H(9,6)$,

半径长 $r=9$.

因为 $\tan\theta=\frac{3}{4}$,

所以设太阳光线所在直线的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+b$,即 $3x+4y-4b=0$.

由太阳光线与半圆相切,

得 $\frac{|27+24-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=9$,

解得 $b=24$,或 $b=\frac{3}{2}$.

结合图形可知 $b=24$.

故太阳光线所在直线的方程为 $3x+4y-96=0$.

令 $x=30$,得 $|EG|=y=1.5<2.5$,

所以此时能保证采光要求.

(2)设 $AD=h$,$AB=2r$,则半圆的圆心为 $H(r,h)$,半径长为 r.

欲使活动中心的截面面积最大,则影长 $|EG|=2.5$,此时 $G\left(30,\frac{5}{2}\right)$.

设过点 G 的太阳光线为 l_1,则 l_1 所在直线的方程为 $y-\frac{5}{2}=-\frac{3}{4}(x-30)$,

即 $3x+4y-100=0$.

由直线 l_1 与半圆 H 相切,得 $r=\frac{|3r+4h-100|}{5}$.

又点 $H(r,h)$ 在直线 l_1 的下方,则 $3r+4h-100<0$,即 $r=-\frac{3r+4h-100}{5}$,

从而 $h=25-2r$.

又 $S=2rh+\frac{1}{2}\pi r^2=2r(25-2r)+\frac{3}{2}\times r^2=-\frac{5}{2}(r-10)^2+250\leqslant250$,

当 $r=10$ 时取等号.

所以当 $AB=20$ 米且 $AD=5$ 米时,可使得活动中心的截面面积最大.

数学·人教A(必修2)

第11期

第2~3版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.D　4.C　5.D　6.A

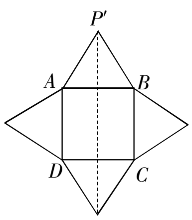
7.A　8.B　9.B　10.D

11.B

提示:因为 $BD\parallel B_1D_1$, $B_1D_1\subset$平面CB_1D_1,所以$BD\parallel$平面CB_1D_1,故①正确;连接AC,交BD于点O,由$AC\perp BD$,$CC_1\perp BD$,得$BD\perp$平面ACC_1,所以$AC_1\perp BD$,故②正确;$\angle C_1AC$即为直线AC_1与平面$ABCD$所成的角,且$\tan\angle C_1AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故③不正确.

12.C

提示:将正四棱锥侧面展开,如图所示,则当PP'为正方形的对角线时,所需正方形包装纸的面积最小,则边长最小.因为正四棱锥的棱长均为a,所以最小正方形的对角线长为$\frac{\sqrt{3}}{2}a\times2+a=(1+\sqrt{3})a$,所以最小边长为$\frac{(1+\sqrt{3})a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}a$.



(第12题图)

二、填空题

13.$3\sqrt{2}$　　14.60°　　15.2

16.$(-\infty,-6)$

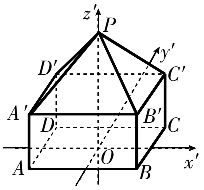
提示:因为$x^2+y^2-2x-2y+b=0$表示圆,所以$(-2)^2+(-2)^2-4b>0$,解得$b<2$.

因为直线$ax+y+a+1=0$过定点$(-1,-1)$,所以若满足要求,则点$(-1,-1)$必在圆$x^2+y^2-2x-2y+b=0$的内部.

所以$6+b<0$,解得$b<-6$.所以实数b的取值范围是$(-\infty,-6)$.

三、解答题

17.**解:**(1)直观图如图所示.



(第17题图)

(2)由题意可知,该几何体是由正四棱柱$ABCD-A'B'C'D'$与正四棱锥$P-A'B'C'D'$构成的简单组合体.

设正方形$A'B'C'D'$的中心为O',

取$A'B'$的中点Q,连接PQ,PO',QO'.

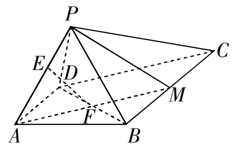
由图,得$AB=AD=2,AA'=1,PO'=1$,

从而$PQ=\sqrt{PO'^2+O'Q^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

所以该几何体的表面积

$S=\frac{\sqrt{2}}{2}(A'B'+B'C'+C'D'+D'A')+(A'B'+B'C'+C'D'+D'A')\times1+AB\cdot AD=4\sqrt{2}+12$.

18.**证明:**连接PM.



(第18题图)

因为$AD\parallel BC$,

所以$\frac{BF}{FD}=\frac{MF}{FA}$.

又$\frac{PE}{EA}=\frac{BF}{FD}$,

所以$\frac{PE}{EA}=\frac{MF}{FA}$.

由平面几何知识可得$EF\parallel PM$.

又$EF\not\subset$平面PBC,$PM\subset$平面PBC,

所以$EF\parallel$平面PBC.

19.**解:**(1)由$A(-2,0)$,$B(0,-2\sqrt{2})$,

得$k_{AB}=-\sqrt{2}$.

又$AB\perp BC$,所以$k_{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又BC边所在直线过点$B(0,-2\sqrt{2})$,

所以BC边所在直线的方程为

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}$,即$x-\sqrt{2}y-4=0$.

(2)由(1)知BC边所在直线的方程为$x-\sqrt{2}y-4=0$,令$y=0$,则$x=4$,即$C(4,0)$,

所以圆心$M(1,0)$,

半径长为$|AM|=3$.

所以外接圆M的方程为$(x-1)^2+y^2=9$.

20.**解:**(1)因为圆O_1的方程为$x^2+(y+1)^2=4$,

所以点$O_1(0,-1)$,半径长$r_1=2$.

设圆O_2的半径长为r_2,

由两圆外切,知$|O_1O_2|=r_1+r_2$.

又$|O_1O_2|=\sqrt{(2-0)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$,

所以$r_2=|O_1O_2|-r_1=2\sqrt{2}-2$.

所以圆O_2的方程为

$(x-2)^2+(y-1)^2=12-8\sqrt{2}$.

(2)设圆O_2的方程为

$(x-2)^2+(y-1)^2=r_2^2$.

根据圆O_1的方程为$x^2+(y+1)^2=4$,

两圆方程相减,得公共弦AB所在直线的方程为$4x+4y+r_2^2-8=0$.

作$O_1H\perp AB$于H,

则$|AH|=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{2}$,

所以$|O_1H|=\sqrt{2}$.

由圆心$(0,-1)$到直线AB的距离为

$\frac{|r_2^2-12|}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

解得$r_2^2=4$,或$r_2^2=20$.

所以圆O_2的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=4$,或$(x-2)^2+(y-1)^2=20$.

21.(1)**证明:**由题意可知$A_1O\perp$平面BCD,

又$BC\subset$平面BCD,所以$BC\perp A_1O$.

又$BC\perp CD$,且$A_1O\cap CD=O$,

所以$BC\perp$平面A_1CD.

又$A_1D\subset$平面A_1CD,所以$BC\perp A_1D$.

(2)**证明:**因为四边形$ABCD$为矩形,所以$A_1D\perp A_1B$.

由(1)知$A_1D\perp BC$,且$A_1B\cap BC=B$,

所以$A_1D\perp$平面A_1BC.

又$A_1D\subset$平面A_1BD,

所以平面$A_1BC\perp$平面A_1BD.

(3)**解:**因为$A_1D\perp$平面A_1BC,

所以$A_1D\perp A_1C$.

在$\mathrm{Rt}\triangle CA_1D$中,因为$A_1D=6$,$CD=10$,所以$A_1C=8$,$A_1O=\frac{24}{5}$,所以$V_{A_1-BCD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times10\right)\times\frac{24}{5}=48$.

22.(1)**解:**由题意,得$B(-1,0)$.设点$M(x,y)$,则$\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=2$.化简,得点$M$的轨迹$C$的方程为$x^2+y^2=4$.

(2)**证明:**由(1)知点M的轨迹为圆C:$x^2+y^2=4$,令$y=0$,得$x=\pm2$,不妨设$E(-2,0)$,$F(2,0)$.

设$P(-1,y_0)$,$S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,

则直线PE的方程为$y=y_0(x+2)$,

与圆C的方程联立并消去x,

得$(y_0^2+1)y^2-4y_0y=0$,

所以$y_1=\frac{4y_0}{y_0^2+1}$,所以$x_1=\frac{2-2y_0^2}{y_0^2+1}$;

直线PF的方程为$y=-\frac{y_0}{3}(x-2)$,

与圆C的方程联立并消去x,

得$(y_0^2+9)y^2-12y_0y=0$,

所以$y_2=\frac{12y_0}{y_0^2+9}$,所以$x_2=\frac{2y_0^2-18}{y_0^2+9}$.

所以$k_{AS}=\frac{y_1}{x_1+4}=\frac{\frac{4y_0}{y_0^2+1}}{\frac{2-2y_0^2}{y_0^2+1}+4}=\frac{2y_0}{y_0^2+3}$,

$k_{AT}=\frac{y_2}{x_2+4}=\frac{\frac{12y_0}{y_0^2+9}}{\frac{2y_0^2-18}{y_0^2+9}+4}=\frac{2y_0}{y_0^2+3}$,

即$k_{AS}=k_{AT}$.

所以A,S,T三点共线.

第2~3版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.B 2.A 3.C 4.B 5.A
6.A 7.D 8.D 9.C
10.D

提示:由 $AB=2,BC=4,AC=2\sqrt{3}$,结合勾股定理的逆定理,可知 $AC\perp AB$.又 A,B,C 是表面积为 48π 的球面上三点,易求得 $OA=OB=OC=R=2\sqrt{3}$.作 $OM\perp$ 平面 ABC 于 M,则 $MA=MB=MC$,即点 M 是 $Rt\triangle CAB$ 的外心,即 BC 中点,则 $AM=\frac{1}{2}BC=2$.在 $Rt\triangle OMA$ 中,$\cos\angle OAM=\frac{AM}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.D

提示:因为平面 $PAC\perp$ 平面 PBC,且两平面相交于 PC,$AC\perp PC$,$AC\subset$ 平面 PAC,所以 $AC\perp$ 平面 PBC.又因为 $BC\subset$ 平面 PBC,所以 $AC\perp BC$.所以 $\angle ACB=90°$.所以动点 C 的轨迹是以 AB 为直径的圆,除去 A 和 B 两点.

12.B

提示:分别取 CD,CC_1,B_1C_1 的中点 N,R,H,连接 MN,NR,RH,HM,则 $MN/\!/B_1C/\!/HR$,$MH/\!/AC$.从而可得平面 $MNRH/\!/$ 平面 AB_1C.故当 $MP\subset$ 平面 $MNRH$ 时,总有 $MP/\!/$ 平面 AB_1C.又点 $P\in$ 平面 CDD_1C_1,平面 $MNRH\cap$ 平面 $CDD_1C_1=NR$,所以点 P 在 NR 上运动.由 $AB=2$,得 $MN=2\sqrt{2}$,$NR=\sqrt{2}$,$MR=\sqrt{6}$,所以 $MN^2=NR^2+MR^2$,所以 $NR\perp MR$.所以在 $Rt\triangle MRN$ 中,MP 的最大值=斜边长 MN,最小值=直角边长 MR.所以 MP 长度的取值范围是 $[\sqrt{6},2\sqrt{2}]$.

二、填空题

13.4 14.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 15.$\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$

16.$4x^2+4y^2-85x+100=0$

提示:设满足条件的点为 $P(x,y)$,依题意有 $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\sqrt{(x+5)^2+y^2}}=\frac{3}{5}$,化简得点 P 的轨迹方程为 $4x^2+4y^2-85x+100=0$.

三、解答题

17.**解**:(1)由 AC 边上的高 BH 所在直线的方程为 $x-2y-5=0$,可设直线 AC 的方程为 $2x+y+m=0$.

将 $A(5,1)$ 代入,解得 $m=-11$.

所以直线 AC 的方程为 $2x+y-11=0$.

又直线 CM 的方程为 $2x-y-5=0$,

两方程联立,解得 $x=4,y=3$.

所以点 C 的坐标为 $(4,3)$.

(2)设 $B(x_B,y_B)$,$M(x_0,y_0)$.

由 M 是 AB 的中点,得 $\begin{cases}x_0=\frac{x_B+5}{2},\\ y_0=\frac{y_B+1}{2}.\end{cases}$

因为 $M(x_0,y_0)$ 在直线 $CM:2x-y-5=0$ 上,所以 $2\cdot\frac{x_B+5}{2}-\frac{y_B+1}{2}-5=0$. ①

又 $B(x_B,y_B)$ 在直线 $BH:x-2y-5=0$ 上,

所以 $x_B-2y_B-5=0$. ②

联立①②,解得 $x_B=-1,y_B=-3$.

所以 $B(-1,-3)$.

又 $C(4,3)$,由两点式,得直线 BC 的方程为 $6x-5y-9=0$.

所以点 $A(5,1)$ 到直线 BC 的距离为 $d=\frac{|6\times5-5\times1-9|}{\sqrt{6^2+(-5)^2}}=\frac{16\sqrt{61}}{61}$.

18.(1)**证明**:将曲线 C 的方程配方,得 $(x-2a)^2+(y+a)^2=5(a-2)^2$.

因为当 $a\neq2$ 时,$5(a-2)^2>0$,

所以曲线 C 的方程表示的是圆心为 $(2a,-a)$,半径长是 $\sqrt{5}|a-2|$ 的圆.

设圆心坐标为 (x,y),则有 $\begin{cases}x=2a,\\ y=-a.\end{cases}$

消去 a,得 $y=-\frac{1}{2}x$.

故圆心必在直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上.

(2)**解**:由题意,得 $\sqrt{5}|a-2|=|a|$,

解得 $a=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

19.**解**:(1)平行于 yOz 平面的圆的方程可以写成 $\begin{cases}(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,\\ x=a\end{cases}$(其中 $x=a$ 表示圆面到 yOz 平面的距离为 $|a|$).

(2)由题意知,圆 C_1 的圆心坐标为 $(-1,2,1)$,圆 C_2 的圆心坐标为 $(1,1,1)$,

因此两圆的圆心距为

$d=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{5}$.

(3)由题意,可知圆 C_1 的圆心坐标为 $(-1,3,0)$,半径长 $r_1=2$;圆 C_2 的圆心坐标为 $(1,1,0)$,半径长 $r_2=3$,而且两圆面与 xOy 平面的距离都是0,即两圆均在 xOy 平面内.

两圆的圆心距为

$|C_1C_2|=\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{2}$,

而 $r_1+r_2=5$,$r_2-r_1=1$,

故有 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_2+r_1$,

所以两圆相交.

20.**证明**:(1)连接 BC_1.

因为 $O\in AC_1\subset$ 平面 ABC_1,

$E\in AB\subset$ 平面 ABC_1,

所以 $OE\subset$ 平面 ABC_1.

又 $OE/\!/$ 平面 BCC_1B_1,平面 $ABC_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC_1$,

由直线与平面平行的性质定理,得 $OE/\!/BC_1$.所以 $\frac{AE}{EB}=\frac{AO}{OC_1}$.

因为 O 是菱形 AA_1C_1C 对角线的交点,所以 $AO=OC_1$.

所以 $AE=EB$.所以 E 是 AB 的中点.

(2)因为四边形 AA_1C_1C 是菱形,

所以 $AC_1\perp A_1C$.

又 $AC_1\perp A_1B$,$A_1C\cap A_1B=A_1$,

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC.

因为 $BC\subset$ 平面 A_1BC,

所以 $AC_1\perp BC$.

21.(1)**证明**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $BC/\!/AD$.又 $BC\not\subset$ 平面 PDA,$AD\subset$ 平面 PDA,所以 $BC/\!/$ 平面 PDA.

(2)**解**:在矩形 $ABCD$ 中,$AD\perp CD$,

又平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$,

且平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=CD$,

$AD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AD\perp$ 平面 PDC.

因为 $CD,PD\subset$ 平面 PDC,

所以 $AD\perp CD,AD\perp PD$.

所以 $\angle PDC$ 即为二面角 $P-AD-C$ 的平面角.

在 $Rt\triangle PDE$ 中,$PD=4$,$DE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$,则 $PE=\sqrt{PD^2-DE^2}=2\sqrt{2}$.

所以 $PE=DE$.故 $\angle PDC=\angle DPE=45°$.

故二面角 $P-AD-C$ 的大小为 $45°$.

(3)**解**:连接 AC.因为 $AF=2FB$,$CG=2GB$,即 $\frac{AF}{FB}=\frac{CG}{GB}=2$,所以 $AC/\!/FG$.

所以 $\angle PAC$ 或其补角为直线 PA 与直线 FG 所成的角.

在 $\triangle PAC$ 中,$PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=5$,

$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{41}$,$PC=4$,

所以 $PA^2+PC^2=AC^2$.

所以 $PA\perp PC$.

所以 $\cos\angle PAC=\frac{PA}{AC}=\frac{5\sqrt{41}}{41}$,

即直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

22.**解**:(1)由于直线 $x=4$ 与圆 C_1 不相交,故直线 l 的斜率存在,设其方程为 $y=k(x-4)$,即 $kx-y-4k=0$.

因为 l 被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$,

所以圆心 $C_1(-3,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$.

结合点到直线的距离,

有 $d=\frac{|-3k-1-4k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,

解得 $k=0$,或 $k=-\frac{7}{24}$.

所以直线 l 的方程为 $y=0$,或 $7x+24y-28=0$.

(2)设点 $P(a,b)$ 满足条件,不妨设直线 l_1 的方程为 $y-b=k(x-a)(k\neq0)$,则直线 l_2 的方程为 $y-b=-\frac{1}{k}(x-a)$.

由题意,可得圆心 $C_1(-3,1)$ 到直线 l_1 的距离与圆心 $C_2(4,5)$ 到直线 l_2 的距离相等,

则 $\frac{|1-k(-3-a)-b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|5+\frac{1}{k}(4-a)-b\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$.

整理,得

$|1+3k+ak-b|=|5k+4-a-bk|$.

所以 $1+3k+ak-b=\pm(5k+4-a-bk)$,即 $(a+b-2)k=b-a+3$ 或 $(a-b+8)k=a+b-5$.

因为 k 的取值有无穷多个,

所以 $\begin{cases}a+b-2=0,\\ b-a+3=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-b+8=0,\\ a+b-5=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{5}{2},\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2},\\ b=\frac{13}{2}.\end{cases}$

故点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$.