数学·人教A(必修5)

第4期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.C

3.D

提示：$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)=-1+20=19$，所以数列$\{a_n+b_n\}$的公差为19.

4.D 5.C

6.C

提示：从第二项起，每一项与前一项的差是这一项的项数，即 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=4$，$a_5-a_4=5$，依此规律得 $a_6-a_5=6$，$a_7-a_6=7$.

所以 $a_7=7+a_6=7+6+a_5=13+15=28$.

7.C

提示：因为 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=n^2$，所以 $a_1\cdot a_2\cdot a_3=9$，$a_1\cdot a_2=4$，所以 $a_3=\frac{9}{4}$.

同理 $a_5=\frac{25}{16}$，所以 $a_3+a_5=\frac{9}{4}+\frac{25}{16}=\frac{61}{16}$.

8.D

提示：由等差数列的性质，得 $a_1+a_7+a_{13}=3a_7=4\pi$，所以 $a_7=\frac{4\pi}{3}$.

所以 $\tan(a_2+a_{12})=\tan(2a_7)=\tan\frac{8\pi}{3}=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

9.B

提示：由$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，得$a_2-a_1=1-\frac{1}{2}$，$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$a_4-a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$a_5-a_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，将这些等式相加，得$a_5-a_1=1-\frac{1}{5}$，得$a_5=\frac{9}{5}$.

10.B

提示：由 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$ 得 $a_n=2n-10$ $(n\in N_+)$.

由 $5<2k-10<8$，得 $7.5<k<9$，所以 $k=8$.

11.A

提示：设过 P,Q 的直线斜率为 k，则 $k=\frac{a_4-a_3}{4-3}=d$（d 为公差）.

因为 $S_5=\frac{(a_1+19)\times 5}{2}=55$，所以 $a_1=3$.

所以 $d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=4$.所以 $k=4$.

12.B

提示：钢管排列方式是从上到下各层钢管数组成了一个等差数列，最上面一层钢管数为1，逐层增加1个.所以钢管总数为：$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

当 $n=19$ 时，$S_{19}=190$.当 $n=20$ 时，$S_{20}=210>200$.

所以 $n=19$ 时，剩余钢管根数最少，为10根.

二、填空题

13.49

14.$\sqrt{3}$

提示：由$\frac{a+b}{2}=\sqrt{3}$，得等差中项是$\sqrt{3}$.

15.$(-3,+\infty)$

提示：由$\{a_n\}$为递增数列，得 $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+\lambda(n+1)-n^2-\lambda n=2n+1+\lambda>0$ 恒成立，

即 $\lambda>-2n-1$ 在 $n\geqslant 1$ 时恒成立，令 $f(n)=-2n-1$，$[f(n)]_{\max}=-3$.

只需 $\lambda>[f(n)]_{\max}=-3$ 即可.

16.$\frac{1}{2}$

提示：由题意设这4个根为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}+d$，$\frac{1}{4}+2d$，$\frac{1}{4}+3d$.

则$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+3d\right)=2$，所以 $d=\frac{1}{2}$，所以这4个根依次为$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{4}$，

所以 $n=\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{16}$，$m=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{15}{16}$ 或 $n=\frac{15}{16}$，$m=\frac{7}{16}$，所以$|m-n|=\frac{1}{2}$.

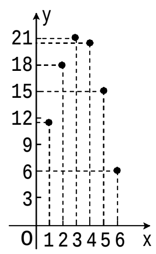
三、解答题

17.**解**：(1)$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n\text{为奇数},\\ \frac{n}{2}+9, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 或 $a_n=\frac{1}{2}\left[\left(n+\frac{19}{2}\right)+(-1)^n\times\frac{17}{2}\right]$.

(2)$a_n=1+(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^2}{2n}$.

18.**解**：令 $f(x)=-2x^2+13x=-2\left(x-\frac{13}{4}\right)^2+\frac{169}{8}$，则函数$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{13}{4}\right]$上是增函数，在$\left[\frac{13}{4},+\infty\right)$上是减函数.又 $3<x=\frac{13}{4}<4$，且$\frac{13}{4}$离3较近，所以当 $n=3$ 时，$f(n)=-2n^2+13n$ 取得最大值21. 所以 a_n 的最大值为21.

易知 $a_1=11$，$a_2=18$，$a_3=21$，$a_4=20$，$a_5=15$，$a_6=6$，$a_7=-7<0$，所以数列$\{a_n\}$在x轴上方的图象如下：



（第18题图）

19.**解**：(1)因为$(1,-10)$，$(3,-2)$是等差数列$\{a_n\}$图象上的两点，所以 $a_1=-10$，$a_3=-2$.

由 $a_3=a_1+2d=-10+2d=-2$，解得 $d=4$，所以 $a_n=4n-14$.

(2)因为一次函数 $y=4x-14$ 是增函数，所以数列$\{a_n\}$是递增数列.

20.**解**：由 $a_1=1$，及 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}=\frac{1}{3+\frac{1}{a_n}}$，可得 $a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{7}$，$a_4=\frac{1}{10}$，…，由此归纳猜想数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\frac{1}{3n-2}$.因此 $a_{34}=\frac{1}{3\times 34-2}=\frac{1}{100}$.

21.(1)**解**：设 $f(n)=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}=\frac{(3n-1)(3n-2)}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{3n-2}{3n+1}$.令 $n=10$，得第10项 $a_{10}=f(10)=\frac{28}{31}$.

(2)**解**：令$\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{98}{101}$，得 $9n=300$.此方程无正整数解，所以$\frac{98}{101}$不是该数列中的项.

(3)**证明**：因为 $a_n=\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{3n+1-3}{3n+1}=1-\frac{3}{3n+1}$，

又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $0<\frac{3}{3n+1}<1$，所以 $0<a_n<1$. 所以数列中的各项都在区间$(0,1)$内.

(4)**解**：令 $\frac{1}{3}<a_n=\frac{3n-2}{3n+1}<\frac{2}{3}$，则 $\begin{cases}3n+1<9n-6,\\ 9n-6<6n+2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n>\frac{7}{6},\\ n<\frac{8}{3},\end{cases}$ 所以 $\frac{7}{6}<n<\frac{8}{3}$.

又因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以当且仅当 $n=2$ 时，上式成立，故区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$上有数列中的项，且只有一项为 $a_2=\frac{4}{7}$.

22.**解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，由于 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$，

所以 $a_1+2d=7$，$2a_1+10d=26$，解得 $a_1=3$，$d=2$.所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$，$S_n=n\cdot 3+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n(n+2)$.

(2)因为 $a_n=2n+1$，所以 $a_n^2-1=4n(n+1)$，

所以 $b_n=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=$

$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$

$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$，

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{n}{4(n+1)}$.