数学·人教A(必修5)

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

2.A

提示:由等比数列的定义,可得$a_{2017}=8a_{2014}=a_{2014}\cdot q^3$,所以$q^3=8$,即$q=2$.

3.C

提示:$\frac{a_{19}+a_{20}}{a_9+a_{10}}=q^{10}=\frac{b}{a}$,$\frac{a_{99}+a_{100}}{a_9+a_{10}}=q^{90}=(q^{10})^9=\left(\frac{b}{a}\right)^9$,$a_{99}+a_{100}=\left(\frac{b}{a}\right)^9(a_9+a_{10})=\frac{b^9}{a^8}$.

4.D

提示:由$8a_2+a_5=0$,得$8a_1q+a_1q^4=0$,所以$q=-2$,则$\frac{S_5}{S_2}=\frac{a_1(1+2^5)}{a_1(1-2^2)}=-11$.

5.D

提示:$a_3a_5a_7a_9a_{11}=a_7^5=3^5\Rightarrow a_7=3$,$\frac{a_9^2}{a_{11}}=a_7=3$.

6.C

提示:$640\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=270$(元).

7.D

提示:分组求和,要分$m=1$与$m\neq1$两种情况讨论.

8.A

提示:由$a_5=-8a_2$,$a_5>a_2$知$a_1>0$,由$a_5=-8a_2$,得$a_1q^4=-8a_1q$,解得$q=-2$.又因为$|a_1|=1$,所以$a_1=1$,所以$a_n=(-2)^{n-1}$.

9.A

提示:设$b_n=a_n^2$,则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=q^2$,所以$\{b_n\}$成等比数列.$\frac{a_{n+1}+2}{a_n+2}\neq$常数;当$a_n<0$时$\lg a_n$无意义;设$c_n=na_n$,则$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}=\frac{(n+1)q}{n}\neq$常数.

10.C

提示:如等比数列$-1,-2,-4,-8,\cdots$,的公比$q=2$,而该数列为递减数列,排除A;如等比数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$,的公比$q=\frac{1}{2}$,而该数列为递减数列,排除B;如等比数列$-1,1,-1,1,-1,\cdots$,中$a_1a_3a_5<0$,排除D,故选C.

11.D

提示:由题意知$S_n=X$,$S_{2n}=Y$,$S_{3n}=Z$.又因为$\{a_n\}$是等比数列,

所以$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$为等比数列,即$X,Y-X,Z-Y$为等比数列,

所以$(Y-X)^2=X\cdot(Z-Y)$,即$Y^2-2XY+X^2=ZX-XY$,

所以$Y^2-XY=ZX-X^2$,即$Y(Y-X)=X(Z-X)$.

12.C

提示:若$S_2=20$正确,则由$a_1+a_2=S_2$,即$8+8q=20$,得$q=\frac{3}{2}$,则$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=38$,$S_4=65$.若$S_2=20$错误,则$S_3,S_4$正确,但这不可能.综上知,$S_3=36$算错了.

二、填空题

13.±2

14.1023

提示:点(n,a_n)在曲线$y=2^{x-1}$上,则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2^{n-1}$,于是该数列是首项为1,公比为2的等比数列,所以$S_{10}=\frac{1-2^{10}}{1-2}=1023$.

15.15.5

提示:每次剩下原来的$\frac{19}{20}$,所以逐次剩下的酒精量就构成以19为首项,以$\frac{19}{20}$为公比的等比数列$\{a_n\}$,所以$a_n=19\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$,所以$a_5=19\times\left(\frac{19}{20}\right)^4=19\times0.95^4\approx15.5$ (L),故倒5次后容器中剩下纯酒精15.5L.

16.①②③

提示:对于命题①,由题设条件知$\begin{cases}2a_n=a_{n-1}+a_{n+1},\\a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1},\end{cases}$消去$a_n$,得$a_{n+1}=a_{n-1}$,再由$\{a_n\}$为等差数列,得公差$d=0$,所以$a_n=a_{n+1}$.对于命题②,由$S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R})$,得$a_n=b+a+(n-1)\cdot2a$,当$n=1$时,也适合上式,所以$\{a_n\}$为等差数列.对于命题③,由$S_n=1-(-1)^n$,得$a_n=2\cdot(-1)^{n-1}$,当$n=1$时,也适合上式,故$\{a_n\}$为等比数列.

三、解答题

17.**解**:设原来的三个数分别为$3t$,$4t$,$5t(t\neq0)$.则$(3t+1)5t=16t^2$,解得$t=5$,或$t=0$(舍),所以$3t=15$,$4t=20$,$5t=25$.所以原来的三个数分别为15,20,25.

18.**解**:由已知,得

$$\begin{cases}a_1\cdot3^4=162, & ①\\ \frac{a_1(1-3^n)}{1-3}=242. & ②\end{cases}$$

由①,得$81a_1=162$,解得$a_1=2$.

将$a_1=2$代入②,得$\frac{2(1-3^n)}{1-3}=242$,即$3^n=243$,解得$n=5$.

所以数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$,项数$n=5$.

19.**解**:在等比数列$\{a_n\}$中,

因为$a_3a_5=64$,即$a_4^2=64$,得$a_4=\pm8$.

当$a_4=-8$时,$a_4(q^2-1)=24$,即$q^2-1=-3$,此方程无解;

当$a_4=8$时,$a_4(q^2-1)=24$,解得$q=\pm2$.

所以,当$q=2$时,$a_1=1$,$S_8=\frac{1-2^8}{1-2}=255$;

当$q=-2$时,$a_1=-1$,

$S_8=\frac{-[1-(-2)^8]}{1+2}=\frac{255}{3}$.

20.**解**:(1)第1个正方形的面积为$4cm^2$,第2个正方形的面积为$2cm^2$,……,这是一个以$a_1=4$为首项,$q=\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

所以第10个正方形的面积为$a_{10}=a_1q^9=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{128}(cm^2)$.

(2)这10个正方形的面积之和为

$S_{10}=\frac{a_1-a_{10}q}{1-q}=\frac{4-2^{-8}}{1-2^{-1}}=8-\frac{1}{2^7}=\frac{1023}{128}(cm^2)$.

21.(1)**解**:由题意,得$2a_{n+1}-a_n=n$,又因为$a_1=\frac{1}{2}$,所以$2a_2-a_1=1$,解得$a_2=\frac{3}{4}$,同理,得$a_3=\frac{11}{8}$,$a_4=\frac{35}{16}$.

(2)**证明**:因为$2a_{n+1}-a_n=n$,所以$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}-1=\frac{a_{n+1}+n+1}{2}-a_{n+1}-1=\frac{n-a_{n+1}-1}{2}$,

$b_n=a_{n+1}-a_n-1=a_{n+1}-(2a_{n+1}-n)-1=n-a_{n+1}-1=2b_{n+1}$,所以$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$.

又$b_1=a_2-a_1-1=-\frac{3}{4}$,所以数列$\{b_n\}$是以$-\frac{3}{4}$为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

22.**解**:(1)因为$S_2=(k+1)S_1+1$,$a_1=1$,$a_2=3$,所以$a_1+a_2=(k+1)a_1+1$,所以$k=2$.

又因为$S_{n+1}=3S_n+1$,$S_n=3S_{n-1}+1(n\geqslant2)$,所以$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=3\cdot(S_n-S_{n-1})=3a_n$,

又因为$a_2=3a_1$,$a_1=1$,

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\in\mathbf{N}_+)$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为3的等比数列,即$a_n=3^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)可知,$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$,$2S_n+1=3^n$,所以$b_n=n\cdot3^n$.

所以$T_n=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n$,

$3T_n=1\cdot3^2+2\cdot3^3+3\cdot3^4+\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$,

两式相减,得

$-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(3^n-1)}{2}-n\cdot3^{n+1}$,

所以$T_n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot3^{n+1}+\frac{3}{4}$.

数学·人教A(必修5)
第6期
第2、3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.C　2.C　3.C　4.C

5.C

提示：由 $a_5=\frac{1}{4}=a_2q^3=2q^3$，解得 $q=\frac{1}{2}$. 数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 仍是等比数列，其首项是 $a_1a_2=8$，公比为 $\frac{1}{4}$，所以 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{8\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})$.

6.D

7.C

提示：由题意知 $\{\lg a_n\}$ 的前8项和为 $\lg a_1+\lg a_2+\cdots\lg a_8=\lg(a_1\cdot\cdots\cdot a_8)=\lg(a_4\cdot a_5)^4=\lg10^4=4$.

8.B

提示：由题意，得 $2a_2=a_1+a_3$，$a_3^2=a_2\cdot a_4$，①

$\frac{2}{a_4}=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$.②

所以 $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$，

代入①，得 $a_4=\frac{2a_3^2}{a_1+a_3}$，③

将③代入②得，$\frac{a_1+a_3}{a_3^2}=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$，因为 $\frac{a_1}{a_3^2}+\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$，所以 $a_3^2=a_1a_5$，所以 a_1，a_3，a_5 成等比数列.

9.B

提示：纸的厚度相同，且各层同心圆直径成等差数列，则 $l=\pi d_1+\pi d_2+\cdots+\pi d_{60}=60\pi\times\frac{4+12}{2}=480\times3.14=1507.2$(cm)≈15m，故选B.

10.D

提示：如下表，$2a=1$，得 $a=\frac{1}{2}$；$1.5b=0.75^2$，得 $b=\frac{3}{8}$；$4c=1$，得 $c=\frac{1}{4}$.故 $a+b+c=\frac{9}{8}$.

1	2	3	4	
0.5	1	1.5		
	a	0.75	1	
		b		
			c	

11.B

提示：依题意，$b_n=b_1\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3n-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3n-2}$，

所以 $a_n+\log_kb_n=3n-7+\log_k\left(\frac{1}{3}\right)^{3n-2}=3n-7+(3n-2)\log_k\frac{1}{3}=\left(3+3\log_k\frac{1}{3}\right)n-7-2\log_k\frac{1}{3}$，

因为 $a_n+\log_kb_n$ 是常数，所以 $3+3\log_k\frac{1}{3}=0$，即 $\log_k3=1$，所以 $k=3$.

12.A

提示：若删去 a_1，则 $a_2a_4=a_3^2$，即 $(a_1+d)(a_1+3d)=(a_1+2d)^2$，化简，得 $d=0$，不合题意.

若删去 a_2，则 $a_1a_4=a_3^2$，即 $a_1(a_1+3d)=(a_1+2d)^2$，化简，得 $\frac{a_1}{d}=-4$；

若删去 a_3，则 $a_1a_4=a_2^2$，即 $a_1(a_1+3d)=(a_1+d)^2$，化简，得 $\frac{a_1}{d}=1$；

若删去 a_4，则 $a_1a_3=a_2^2$，即 $a_1(a_1+2d)=(a_1+d)^2$，化简，得 $d=0$，不合题意.故选A.

二、填空题

13.$a_n=\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n}$

提示：这是一个分数数列，各分母组成偶数数列，通项为 $2n$；各分子可分解为 1×3，3×5，5×7，7×9，…，通项为 $(2n-1)(2n+1)$，故 $a_n=\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n}$.

14.$a+\frac{d}{10}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]$.

提示：$a_4+a_5+\cdots+a_{20}=17a+d\cdot\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]}{1-\frac{2}{3}}=17a+2d\cdot\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]$

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=20a+2d\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]$，所以平均楼价为 $a+\frac{d}{10}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]$.

15.4

提示：设公差为 $d(d\neq0)$，则 $a_1a_{11}=a_3^2$，$2(2+10d)=(2+2d)^2$，解得 $d=3$，或 $d=0$(舍)，所以 $a_3=8$，$q=\frac{8}{2}=4$.

16.-9

提示：由题意知等比数列 $\{a_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-54,-24,18,36,81\}$ 中，由等比数列的定义知，四项是两个正数、两个负数，故 -24，36，-54，81 符合题意，则 $q=-\frac{3}{2}$，所以 $6q=-9$.

三、解答题

17.**解**：因为 $a_1=2$，$a_n=\frac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}$ $(n\geqslant2,n\in N_+)$，

所以 $a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2\times2}{2+2}=1$；$a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{2\times1}{1+2}=\frac{2}{3}$；$a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{2}$.

即 $a_1=2=\frac{2}{1}$，$a_2=\frac{2}{2}$，$a_3=\frac{2}{3}$，$a_4=\frac{2}{4}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{2}{n}$ $(n\in N_+)$.

18.**解**：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 a_1，a_2，a_6 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1\cdot a_6$，

所以 $(1+d)^2=1\times(1+5d)$，所以 $d^2=3d$，

因为 $d\neq0$，所以 $d=3$，所以 $a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$.

(2)数列 $\{b_n\}$ 的首项为1，公比为 $q=\frac{a_2}{a_1}=4$.

因为 $b_1+b_2+\cdots+b_k=\frac{1-4^k}{1-4}=\frac{4^k-1}{3}$，

所以 $\frac{4^k-1}{3}=85$，所以 $4^k=256$，所以 $k=4$，

所以正整数 k 的值为4.

19.**解**：设此数列的公比为 $q(q\neq1)$，项数为 $2n$，

则 $S_{奇}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}=85$，$S_{偶}=\frac{a_2(1-q^{2n})}{1-q^2}=170$，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_2}{a_1}=q=2$.

又 $a_1=1$，所以 $\frac{1-2^{2n}}{1-4}=85$，$2^{2n}=256$，$2n=8$，所以公比为2，项数为8.

20.(1)**证明**：由已知 $a_{n+1}=2a_n+2^n$，

得 $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{2a_n+2^n}{2^n}=\frac{a_n}{2^{n-1}}+1=b_n+1$.

所以 $b_{n+1}-b_n=1$，又 $b_1=a_1=1$.

所以 $\{b_n\}$ 是首项为1，公差为1的等差数列.

(2)**解**：由(1)知，$b_n=n$，$\frac{a_n}{2^{n-1}}=b_n=n$.所以 $a_n=n\cdot2^{n-1}$.

所以 $S_n=1+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，

两边乘以2得：$2S_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，

两式相减得：$-S_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n$

$=2^n-1-n\cdot2^n=(1-n)2^n-1$，

所以 $S_n=(n-1)\cdot2^n+1$.

21.**解**：设工作时间为n天，三种付费方式的前n项和分别为 A_n，B_n，C_n.第一种付费方式为常数列；第二种付费方式为首项是4，公差也是4的等差数列；第三种付费方式为首项是0.4，公比是2的等比数列.

则 $A_n=38n$，

$B_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2+2n$，

$C_n=\frac{0.4(1-2^n)}{1-2}=0.4(2^n-1)$.

当 $n=10$ 时，

$A_{10}=38\times10=380$(元)，

$B_{10}=2\times10^2+2\times10=220$(元)，

$C_{10}=0.4\times(2^{10}-1)=409.2$(元).

因为 $C_{10}>A_{10}>B_{10}$，

所以选择第三种领取报酬的方案较合算.

22.(1)**解**：因为点 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$ 在直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$ 上，所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}n+\frac{11}{2}$，即 $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{11}{2}n$，易知 $a_n=n+5$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

又因为 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n=\cdots=b_2-b_1$，所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.因为 $b_3=11$，它的前9项和为153，设公差为 d，则 $b_1+2d=11$，$9b_1+\frac{9\times8}{2}d=153$，解得 $b_1=5$，$d=3$，所以 $b_n=3n+2$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**：由(1)，得 $c_n=\frac{3}{(2a_n-11)(2b_n-1)}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$.

易知 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$ 在 $n\in\mathbf{N}_+$ 上是增函数，所以 T_n 的最小值为 $T_1=\frac{1}{3}$.

故 $T_n\geqslant\frac{1}{3}$.

数学·人教A(必修5)

第7期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

2.B

提示:因为$a^2+a<0$,所以$0<a^2<-a$,所以$0>-a^2>a$,所以$a<-a^2<a^2<-a$,故选B.

3.C

提示:由$-2x^2+5x-2>0$,解得$\frac{1}{2}<x<2$,所以$\sqrt{4x^2-4x+1}+2|x-2|=(2x-1)+2(2-x)=3$.

4.B

提示:不等式对应方程的根分别为$5a,-a$,因为$a<0$,所以原不等式的解集为$\{x|x<5a,或x>-a\}$.

5.D

提示:二次函数的图象与x轴没有交点,说明判别式小于零,从而解得实数m的取值范围.

6.C

提示:结合二次函数的图象,知$\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$即$\begin{cases}a>0,\\ ac>\frac{1}{4}.\end{cases}$故选C.

7.C

提示:画出$y=\frac{1}{x}$的图象,可确定x的取值范围.

8.A

提示:本题可用特值法:令$a_1=0.1$,$a_2=0.9$;$b_1=0.2$,$b_2=0.8$. 则$a_1b_1+a_2b_2=0.74$;$a_1a_2+b_1b_2=0.25$;$a_1b_2+a_2b_1=0.26$,故选A.

9.A

10.A

提示:原不等式等价于$\begin{cases}(x-3)(x+1)\leqslant 0,\\ x+1\neq 0,\\ (x-2)^2\neq 0,\end{cases}$解得$-1<x\leqslant 3$,且$x\neq 2$,故选A.

11.B

提示:①正确,②错误,③错误.可代入特殊值检验.

12.A

提示:由$4x^2+6x+3=\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立,

从而原不等式等价于$2x^2+2mx+m<4x^2+6x+3(x\in\mathbf{R})$

$\Leftrightarrow 2x^2+(6-2m)x+(3-m)>0$对一切实数$x$恒成立

$\Leftrightarrow \Delta=(6-2m)^2-8(3-m)=4(m-1)(m-3)<0$,

解得$1<m<3$.

二、填空题

13.A>B

14.27

提示:由已知,得$\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\in[16,81]$,$\frac{1}{xy^2}\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{3}\right]$.

故$\frac{x^3}{y^4}=\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{xy^2}\in[2,27]$.

所以$\frac{x^3}{y^4}$的最大值是27.

15.③

提示:①不等式可化为$(x+2)^2>0$,所以解集为$\{x|x\neq-2\}$;②不等式解集为$\{x|x\neq 0\}$;③由$\Delta=1-4<0$,所以不等式解集为$\mathbf{R}$;④由定义域要求$x\neq 0$,所以解集为$\{x|x\neq 0\}$.

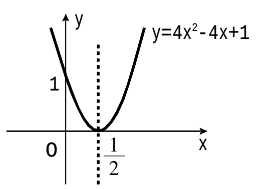
16.$(-1,3)$

提示:由已知得$\begin{cases}x\geqslant a^2+1,\\ x<2a+4,\end{cases}$若不等式组有解,所以$2a+4>a^2+1$,

即$a^2-2a-3<0$,所以$-1<a<3$.

三、解答题

17.**解:**(1)原不等式可化为$4x^2-4x+1\geqslant 0$.因为$\Delta=0$,方程$4x^2-4x+1=0$有两个相等的实数根$x_1=x_2=\frac{1}{2}$. 画出相应二次函数$y=4x^2-4x+1$的图象,如图,可知原不等式的解集是$\mathbf{R}$.



(第17题图)

(2)原不等式移项,得$\frac{2x-1}{x+3}-1>0$,

化简,得$\frac{x-4}{x+3}>0$,即$(x-4)(x+3)>0$,

解得$x<-3$,或$x>4$.

所以原不等式的解集为$\{x|x<-3,或x>4\}$.

18.**解:**由$x^2-3x+1>1$,得$x^2-3x>0$,所以$x<0$或$x>3$;

由$x^2-3x+1<9-x$,得$x^2-2x-8<0$,所以$-2<x<4$.

借助数轴可得:原不等式的解集为$\{x|x<0或x>3\}\cap\{x|-2<x<4\}=\{x|-2<x<0或3<x<4\}$.

19.**解:**根据题意,可知$k-1<0$.

结合二次函数的图象,

得$-2+\frac{4}{5}=\frac{6}{k-1}$,解得$k=-4$.

20.**解:**(1)根据题意,得$200\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\geqslant 3\,000$,即$5x-14-\frac{3}{x}\geqslant 0$,又$1\leqslant x\leqslant 10$,所以$5x^2-14x-3\geqslant 0$,解得$3\leqslant x\leqslant 10$.所以$x$的取值范围是$[3,10]$.

(2)设利润为y元,则$y=\frac{900}{x}\cdot 100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)=9\times10^4\left[-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{61}{12}\right]$.

故当$x=6$时,$y_{max}=457\ 500$,即甲厂以6千克/小时的速度生产该产品获得的利润最大,最大利润为457 500元.

21.**解:**当$m=0$时,原不等式可化为$-3<0$,其对一切$x\in\mathbf{R}$都成立,所以原不等式的解集为$\mathbf{R}$.

当$m\neq 0$时,$m^2>0$,由$m^2x^2+2mx-3<0$,得$(mx-1)(mx+3)<0$,即$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(x+\frac{3}{m}\right)<0$,若$m>0$,则$\frac{1}{m}>-\frac{3}{m}$,所以原不等式的解集为$\left\{x\left|-\frac{3}{m}<x<\frac{1}{m}\right.\right\}$;

若$m<0$,则$\frac{1}{m}<-\frac{3}{m}$,所以原不等式的解集为$\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<-\frac{3}{m}\right.\right\}$.

综上所述,当$m=0$时,原不等式的解集为$\mathbf{R}$;当$m>0$时,原不等式的解集为$\left\{x\left|-\frac{3}{m}<x<\frac{1}{m}\right.\right\}$;当$m<0$时,原不等式的解集为$\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<-\frac{3}{m}\right.\right\}$.

22.**解:**由函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$的值域为$[0,+\infty)$,可知对于$x^2+ax+b=0$,有$\Delta=a^2-4b=0$,即$b=\frac{a^2}{4}$,所以$f(x)=x^2+ax+b=x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$, 由$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2<c$,解得$-\sqrt{c}-\frac{a}{2}<x<\sqrt{c}-\frac{a}{2}$.

又不等式$f(x)<c$的解集为$(m,m+6)$,所以$\left(\sqrt{c}-\frac{a}{2}\right)-\left(-\sqrt{c}-\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{c}=6$,解得$c=9$.

数学·人教A(必修5)
第8期
第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.A　4.B　5.D　6.B　7.C　8.C

9.B

提示:根据题意,可知点$P(x,y)$在$\begin{cases}x-y\leqslant 7,\\ x-y\geqslant -14\end{cases}$所确定的平面区域内,如图所示.又点$P$在直线$4x+3y=0$上,故当$P$在点$A(-6,8)$时,距离最大,是10;当$P$在原点$O$时,距离最小,是0,故其取值范围是$[0,10]$.

10.B

提示:由可行域,知当直线$y=-ax+z$与直线AC重合时,最优解有无穷多个.

所以$-a=\frac{5-2}{1-6}=-\frac{3}{5}$,故$a=\frac{3}{5}$.

11.D

12.B

提示:设500mm的毛坯x根,600mm的毛坯y根,约束条件为$\begin{cases}500x+600y\leqslant 4000,\\ \frac{x}{y}>\frac{1}{3},\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0;\end{cases}$目标函数为$z=x+y$,画图可求出最优整数解为$x=2,y=5$.

二、填空题

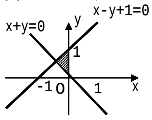
13.3

提示:(1,1),(1,2),(2,1),共3个.

14.$\begin{cases}x+y+2\geqslant 0,\\ x+2y+1\leqslant 0,\\ 2x+y+1\leqslant 0\end{cases}$

15.1

提示:由已知不等式组作可行域,如图阴影部分所示,



(第15题图)

令$x+2y=k$,则$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$,

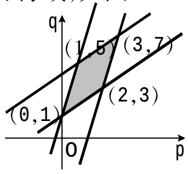
问题由求k的最小值转化为求直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$的纵截距的最小值.

显然当直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$过原点O时,截距最小,此时$k_{\min}=0$,$z=3^{x+2y}$的最小值为1.

16.$[-1,20]$

提示:因为$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,所以$\begin{cases}p-q\leqslant -1,\\ p-q\geqslant -4,\\ 4p-q\leqslant 5,\\ 4p-q\geqslant -1,\end{cases}$求f(3)的取值范围即求$z=9p-q$的最值.

作出可行域,如图.



(第16题图)

因为$\begin{cases}p=0,\\ q=1,\end{cases}z_{\min}=-1$;$\begin{cases}p=3,\\ q=7,\end{cases}z_{\max}=20$,

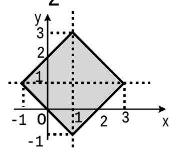
所以$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

三、解答题

17.解:$|x-1|+|y-1|\leqslant 2$可化为

$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y\geqslant 1,\\ x+y\leqslant 4,\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y\leqslant 1,\\ x-y\leqslant 2,\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 1,\\ y\geqslant 1,\\ -x+y\leqslant 2,\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 1,\\ y\leqslant 1,\\ x+y\geqslant 0,\end{cases}$其平面区域如图所示.

故面积$S=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.



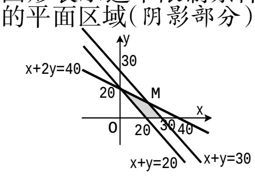
(第17题图)

18.解:设开设初中班x个,高中班y个.

根据题意,得$\begin{cases}20\leqslant x+y\leqslant 30,\\ 26x+54y+2\times 2x+2\times 3y\leqslant 1200,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x,y\in \mathbf{N}.\end{cases}$

即$\begin{cases}20\leqslant x+y\leqslant 30,\\ x+2y\leqslant 40,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x,y\in \mathbf{N}.\end{cases}$

用图形表示这个限制条件,得到如图所示的平面区域(阴影部分).



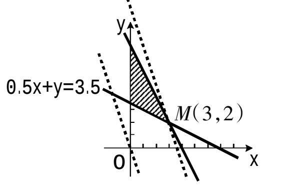
(第18题图)

19.解:设电视台每周应播映宣传片甲x次,宣传片乙y次,总收视观众为z万人,

则其线性约束条件为$\begin{cases}4x+2y\leqslant 16,\\ 0.5x+y\geqslant 3.5,\\ x,y\in \mathbf{N},\end{cases}$

目标函数为$z=60x+20y$.

作出可行域(下图).

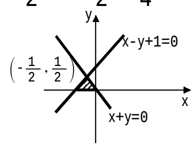


(第19题图)

由图,可得当$x=3,y=2$时,$z_{\max}=220$.

答:电视台每周应播映宣传片甲3次,宣传片乙2次,才能使得收视观众最多.

20.解:根据题意知直线$y=kx+1$与直线$x+y=0$垂直,故$k=1$,又据圆的几何性质可知圆心$\left(-\frac{1}{2},-\frac{m}{2}\right)$在直线$x+y=0$上,解得$m=-1$,故线性约束条件即为$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$画出线性可行域,如图,易求得三角形面积$S=\frac{1}{2}\times 1\times \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.



(第20题图)

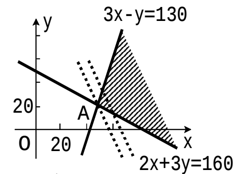
21.解:(1)由题意得,x,y,z满足$x+y+z=100$,所以$z=100-x-y$,

所以混合物成本$C=11x+9y+4z=7x+5y+400$(元).

(2)由题意得,$\begin{cases}600x+700y+400z\geqslant 56000,\\ 800x+400y+500z\geqslant 63000,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$

因为$z=100-x-y$,所以$\begin{cases}2x+3y\geqslant 160,\\ 3x-y\geqslant 130,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$

作出约束条件所表示的可行域,如图所示.



(第21题图)

由$\begin{cases}3x-y=130,\\ 2x+3y=160,\end{cases}$得点A的坐标为$x=50,y=20$.

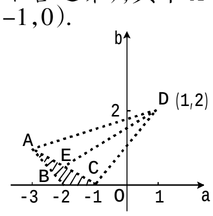
作直线$7x+5y+400=C$,易知该直线截距越小,C越小,所以该直线过点A(50,20)时,直线在y轴上的截距最小,从而使C最小,此时$C=7\times 50+5\times 20+400=850$(元).

答:用50kg甲种食物,20kg乙种食物,30kg丙种食物混合时,成本最低.

22.解:令$f(x)=x^2+ax+2b$.

由题意知,$\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)<0,\\ f(2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b>0,\\ a+2b+1<0,\\ a+b+2>0.\end{cases}$

作出上述不等式组对应的点(a,b)所在的平面区域,得到$\triangle ABC$及其内部,如图所示(不含边界),其中$A(-3,1)$,$B(-2,0)$,$C(-1,0)$.



(第22题图)

设点$E(a,b)$为区域内的任意一点,$D(1,2)$.

(1)$\frac{b-2}{a-1}$表示点E与点D连线的斜率,结合图形可知$k_{AD}<\frac{b-2}{a-1}<k_{CD}$.

又$k_{AD}=\frac{1}{4}$,$k_{CD}=1$,

所以$\frac{b-2}{a-1}$的取值范围是$\left(\frac{1}{4},1\right)$.

(2)$|DE|^2=(a-1)^2+(b-2)^2$,表示区域内的点E与点D之间距离的平方.

运动点E,可得当E在点C时$|DE|^2$最小,且$|DE|^2=8$;当E在点A时$|DE|^2$最大,且$|DE|^2=17$.

故$(a-1)^2+(b-2)^2$的取值范围是$(8,17)$.

(3)令$z=a+b-3$,则直线系$b=-a+3+z$过点C时,z最大,为-4;过点A时,z最小,为-5.

故$a+b-3$的取值范围是$(-5,-4)$.