数学·人教A(必修5)

第9期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B　2.A　3.D　4.B　5.C

6.D

提示：因为 $2^x>0$，$2^y>0$，所以 $1=2^x+2^y\geqslant 2\sqrt{2^{x+y}}$（当且仅当 $2^x=2^y$ 时，等号成立），

所以 $\sqrt{2^{x+y}}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $2^{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$，所以 $x+y\leqslant -2$.

7.B

8.B

提示：因为 $x+2y\geqslant 2\sqrt{x\cdot 2y}$，所以 $(x+2y)^2\geqslant 4\cdot 2xy=4[8-(x+2y)]$，即 $[(x+2y)-4][(x+2y)+8]\geqslant 0$，解得 $x+2y\geqslant 4$，当且仅当 $x=2y$，即 $x=2$，$y=1$ 时等号成立.故选B.

9.A

提示：由题意可得 $a^2+b^2=c^2=8$，所以 $C=90°$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}=2$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.故选 A.

10.C

提示：因为 $a>b>0$，所以 $b(a-b)>0$.

所以 $b(a-b)\leqslant\left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$，所以

$a^2+\frac{1}{b(a-b)}\geqslant a^2+\frac{4}{a^2}\geqslant 4$，

当且仅当 $\begin{cases}b=a-b,\\ a^2=\frac{4}{a^2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 时，等号成立.故选 C.

11.A

提示：由已知得 $4(x-1)+2y=0$，即 $2x+y=2$.

所以 $xy=x(2-2x)=\frac{2x(2-2x)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{2x+2-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，当且仅当 $2x=2-2x$，即 $x=\frac{1}{2}$，$y=1$ 时，等号成立，所以 xy 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

12.C

提示：由条件知，直线 l_1 与 l_2 的斜率存在，且 $l_1\perp l_2$，$k_1=-a^2$，$k_2=\frac{b}{a^2+1}$，

所以 $k_1k_2=\frac{-a^2b}{a^2+1}=-1$，

所以 $b=\frac{a^2+1}{a^2}>0$，所以 $|ab|=\left|\frac{a^2+1}{a}\right|=|a|+\frac{1}{|a|}\geqslant 2$，当且仅当 $|a|=\frac{1}{|a|}$，即 $a=\pm1$，$b=2$ 时等号成立，所以 $|ab|$ 的最小值为 2.

二、填空题

13.$\sqrt{(a-b)(b-c)}\leqslant\frac{a-c}{2}$

提示：因为 $a>b>c$，所以 $a-b>0$，$b-c>0$，所以 $\sqrt{(a-b)(b-c)}\leqslant\frac{(a-b)+(b-c)}{2}=\frac{a-c}{2}$.

14.-3

提示：设 $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$，则 $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+15=t^2-8t+13=(t-4)^2-3\geqslant -3$.

15.$\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$

提示：因为 $x>0$，所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，

当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以有 $\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$，

即 $\frac{x}{x^2+3x+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{5}$，故 $a\geqslant\frac{1}{5}$.

16.4

提示：$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$.前一个等号成立条件是 $a^2=2b^2$，后一个等号成立的条件是 $ab=\frac{1}{2}$，两个等号可以同时取得，则当且仅当 $a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时取等号.

三、解答题

17. 解：因为 $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{a+b}{4|a|}+\frac{|a|}{b}\geqslant\frac{a}{4|a|}+2\sqrt{\frac{b}{4|a|}\cdot\frac{|a|}{b}}=\frac{a}{4|a|}+1\geqslant-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$，当且仅当 $\frac{b}{4|a|}=\frac{|a|}{b}$，$a<0$，即 $a=-2$，$b=4$ 时取等号，故 $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 的最小值是 $\frac{3}{4}$.

18.解：(1)因为 $x>0$，$y>0$，由基本不等式，得 $2x+5y\geqslant 2\sqrt{2x\cdot 5y}$，即 $20\geqslant 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{xy}$，所以 $xy\leqslant 10$，当且仅当 $2x=5y$，即 $x=5$，$y=2$ 时等号成立.

所以 $u=\lg x+\lg y=\lg(xy)\leqslant\lg 10=1$.

故 u 的最大值是 1.

(2)由已知，得 $xy=100$.

所以 $5x+2y\geqslant 2\sqrt{10xy}=20\sqrt{10}$，当且仅当 $5x=2y$，即 $x=2\sqrt{10}$，$y=5\sqrt{10}$ 时，等号成立.

所以 v 的最小值是 $20\sqrt{10}$.

19.证明：(1)因为 $a>0$，$b>0$，所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

(2)因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1+\frac{b+a}{ab}+\frac{1}{ab}=1+\frac{2}{ab}\geqslant 1+\frac{2}{\frac{1}{4}}=9$.

20.解：设全年需要的运费和保管费的总费用为 y 元，题中的比例系数为 k，每批购入 x 台，则共需分 $\frac{3600}{x}$ 批，每批电视机的价值为 $2000x$ 元.

由题意，可得 $y=\frac{3600}{x}\times 400+k\cdot 2000x$.

由当 $x=400$ 时，$y=43600$，得 $k=\frac{1}{20}$，所以 $y=\frac{3600}{x}\times 400+100x\geqslant 2\sqrt{\frac{3600}{x}\times 400\times 100x}=24000$.

当且仅当 $\frac{3600}{x}\times 400=100x$，即 $x=120$ 时，等号成立.

故每批购入120台，可以使资金够用.

21.解：设直线AB的方程为 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$，当直线AB与圆相切时，得 $2a+2b-2ab-1=0$.　①

又 $S_{\triangle AOB}=2ab=S$，

所以 $2ab=2a+2b-1\geqslant 4\sqrt{ab}-1=4\sqrt{\frac{S}{2}}-1$，

所以 $S\geqslant 4\sqrt{\frac{S}{2}}-1$，$S-2\sqrt{2S}+1\geqslant 0$，

所以 $\sqrt{S}\geqslant\sqrt{2}+1$，或 $\sqrt{S}\leqslant\sqrt{2}-1$（舍）.

所以 $S\geqslant(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.所以△AOB面积的最小值为 $3+2\sqrt{2}$，

将 $a=b$ 代入①，得 $2a^2-4a+1=0$，

所以 $a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍），

故直线AB的方程为 $x+y-2-\sqrt{2}=0$.

22.(1)解：$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{8}\times 2^x+\frac{1}{2^x}}$.

因为 $\frac{1}{8}\times 2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $f(x)\leqslant\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{8}\times 2^x=\frac{1}{2^x}$，

即 $x=\frac{3}{2}$ 时，等号成立.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

(2)证明：由(1)，知 $f(a)\leqslant\sqrt{2}$.

又 $b^2-4b+\frac{11}{2}=(b-2)^2+\frac{3}{2}\geqslant\frac{3}{2}$，

而 $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，

所以对任意实数 a，b，$f(a)<b^2-4b+\frac{11}{2}$.

数学·人教A(必修5)

第10期

第2、3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.C

提示：对于选项A，a>b⇒$am^2\geqslant bm^2$，故A错误；对于选项B，不知道c的正负情况，故B错误；对于选项C，$a^3>b^3\Rightarrow a>b$，又$ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故C正确；对于选项D，当a=-2，b=-1时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$不成立，故D错误.

2.B

提示：经检验，点(0，-2)满足不等式组$\begin{cases}x+y-1<0,\\x-y+1>0,\end{cases}$其余均不满足.

3.A

提示：由题意知，$4m^2+(1-m^2)\cdot2-4m\leqslant0$，所以$m^2-2m+1\leqslant0$.即$(m-1)^2\leqslant0$，所以$m=1$.

4.A

5.C

提示：设矩形的另一边长为y m，则由三角形相似知，$\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}$，

所以$y=40-x$.因为$xy\geqslant300$，所以$x(40-x)\geqslant300$，

所以$x^2-40x+300\leqslant0$，所以$10\leqslant x\leqslant30$.

6.B

提示：由题意知

$\begin{cases}a<0,\\\Delta=(a-1)^2-4a(a-1)<0,\end{cases}$

解得$a<-\frac{1}{3}$.

7.B

提示：由题意可知$f(x)=e^x*\frac{1}{e^x}=e^x\cdot\frac{1}{e^x}+e^x+\frac{1}{e^x}=e^x+\frac{1}{e^x}+1\geqslant2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}+1=3$，当且仅当$e^x=\frac{1}{e^x}$，即$x=0$时，等号成立，故函数$f(x)$的最小值为3.

8.D

9.C

提示：当$x<0$时，$y=x+\frac{4}{x}\leqslant-4$，排除A；因为$0<x<\pi$，所以$0<\sin x<1$，$y=\sin x+\frac{4}{\sin x}\geqslant4$，但$\sin x=\frac{4}{\sin x}$无解，排除B；$e^x>0$，$y=e^x+4e^{-x}\geqslant4$，等号在$e^x=\frac{4}{e^x}$，即$x=\ln2$时成立；D中，$x>0$且$x\neq1$，若$0<x<1$，则$\log_3x<0$，$\log_x81<0$，所以排除D.

10.B

提示：设方程的两根为x_1，x_2，

由题意，得$\begin{cases}\Delta=(m+2)^2-4(m+5)\geqslant0,\\x_1+x_2=-(m+2)>0,\\x_1x_2=m+5>0,\end{cases}$

解得$-5<m\leqslant-4$.

11.C

提示：因为$a+\frac{1}{a-2}=a-2+\frac{1}{a-2}+2\geqslant4$，

所以$m\leqslant4$.

12.B

提示：因为不等式$ax-b>0$的解集为$(1,+\infty)$，所以$a>0$且$\frac{b}{a}=1$，所以不等式$\frac{ax+b}{x-2}>0$化为$\frac{x+1}{x-2}>0$，解得$x<-1$或$x>2$.

二、填空题

13.$\sqrt{xyz}>\sqrt{xy}>\sqrt{xz}>\sqrt{yz}$

提示：取特殊值法，由$x>y>z>1$，

取$x=4$，$y=3$，$z=2$，分别代入得$\sqrt{xyz}=2\sqrt{6}$，$\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{yz}=\sqrt{6}$，$\sqrt{zx}=2\sqrt{2}$.故$\sqrt{xyz}>\sqrt{xy}>\sqrt{xz}>\sqrt{yz}$.

14.$\frac{3}{2}$

15.30

提示：总费用$=4x+\frac{600}{x}\times6=4\left(x+\frac{900}{x}\right)\geqslant4\times2\sqrt{900}=240$，当且仅当$x=\frac{900}{x}$，即$x=30$时，等号成立.

16.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

提示：依题意，对任意的$x\in[4,+\infty)$，有$f(x)=(mx+1)(m^2x-1)<0$恒成立，结合图象分析可知$\begin{cases}m<0,\\-\frac{1}{m}<4,\\\frac{1}{m^2}<4,\end{cases}$由此解得$m<-\frac{1}{2}$，

即实数m的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

三、解答题

17.**解**：$ab=ab\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，所以$ab\geqslant4$，当且仅当$a=2$，$b=2$时，等号成立，

$xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}=4$，当且仅当$x=y=2$时，等号成立，所以$ab\geqslant xy$.

18.**解**：(1)原不等式可化为$2x^2-x-1\geqslant0$，即$(2x+1)(x-1)\geqslant0$，故原不等式的解集为$\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{2}，或x\geqslant1\right\}$.

(2)原不等式可化为$0<x+\frac{1}{x}+6\leqslant8$，

即$\begin{cases}x+\frac{1}{x}\leqslant2,\\x+\frac{1}{x}>-6.\end{cases}$

当$x>0$时，$x+\frac{1}{x}\geqslant2$，

所以$x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow x=1$；

当$x<0$时，$-6<x+\frac{1}{x}\leqslant-2$，

所以$-3-2\sqrt{2}<x<-3+2\sqrt{2}$.

所以原不等式的解集为

$\{x|-3-2\sqrt{2}<x<-3+2\sqrt{2}，或x=1\}$.

19.(1)**证明**：因为a，b，c是$\triangle ABC$的三边，不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$则$a>b-c\geqslant0$，$b>a-c\geqslant0$，$c>a-b\geqslant0$.平方得$a^2>b^2+c^2-2bc$，$b^2>a^2+c^2-2ac$，$c^2>a^2+b^2-2ab$，

三式相加得：$0>a^2+b^2+c^2-2bc-2ac-2ab$.所以$2ab+2bc+2ac>a^2+b^2+c^2$.

(2)**解**：令$\sqrt{ab}=t(t>0)$.因为a，b均为正数，所以$ab=a+b+3\geqslant2\sqrt{ab}+3$，

所以$t^2\geqslant2t+3$，解得$t\geqslant3$或$t\leqslant-1$(舍去)，所以$\sqrt{ab}\geqslant3$，

故$ab\geqslant9$，所以ab的取值范围是$[9,+\infty)$.

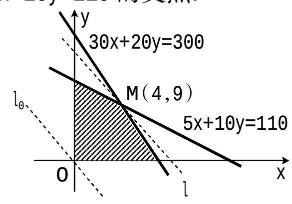
20.**解**：设周供应甲产品为x件，乙产品为y件，利润为z百元，

则$\begin{cases}30x+20y\leqslant300,\\5x+10y\leqslant110,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0,\\x,y\in N,\end{cases}$

目标函数为$z=6x+8y$.

作出可行域(如下图).

作直线l_0:$6x+8y=0$，即$3x+4y=0$，如图，把直线l_0向右上方平移至l的位置时，直线l过可行域内的点M，且l与原点距离最大，这里点M是直线$30x+20y=300$和$5x+10y=110$的交点.



(第20题图)

解方程组$\begin{cases}30x+20y=300,\\5x+10y=110,\end{cases}$得$\begin{cases}x=4,\\y=9,\end{cases}$

所以点M的坐标为(4，9).

将$x=4$，$y=9$代入目标函数$z=6x+8y$，得$z=6\times4+8\times9=96$(百元).

所以，当周供应甲产品4件、乙产品9件时，该公司可获得最大利润，最大利润为9600元.

21.**解**：不等式①的解集为$\{x|x<-1，或x>2\}$.

不等式②变形为$(x+a)\left(x+\frac{5}{2}\right)<0$.

当$a=\frac{5}{2}$时，不等式②无解，不满足题意.

当$a>\frac{5}{2}$时，不等式②的解集为

$\left\{x\middle|-a<x<-\frac{5}{2}\right\}$，也不满足题意.

当$a<\frac{5}{2}$时，不等式②的解集为$\left\{x\middle|-\frac{5}{2}<x<-a\right\}$，此时若满足题意，则需$-2<-a\leqslant3$，即$-3\leqslant a<2$.

综上得实数a的取值范围是$[-3,2)$.

22.**解**：(1)第n次投入后，产量为$(10+n)$万件，每件产品的销售价格为100元，固定成本为$\frac{80}{\sqrt{n+1}}$元，科技成本投入为$100n$，

所以年利润为

$f(n)=(10+n)\left(100-\frac{80}{\sqrt{n+1}}\right)-100n=1000-\frac{80(10+n)}{\sqrt{n+1}}(n\in N_+)$.

(2)$f(n)=1000-80\left(\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}+\frac{9}{\sqrt{n+1}}\right)$

$=1000-80\left(\sqrt{n+1}+\frac{9}{\sqrt{n+1}}\right)$

$\leqslant1000-80\times6$

$=520$(万元)，

当且仅当$\sqrt{n+1}=\frac{9}{\sqrt{n+1}}$，

即$n=8$时，等号成立.

故从今年算起第8年利润最高，最高利润为520万元.

数学·人教A(必修5)

第11期

第2、3版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.D 4.B 5.C 6.C

7.C

提示：由等比数列的性质得 $a_3a_6a_{18}=a_6a_{10}a_{11}=a_8a_9a_{10}=a_9^3$，而 $T_{17}=a_9^{17}$，故 T_{17} 为常数.

8.A

提示：由题意：$A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|-3<x<2\}$，$A\cap B=\{x|-1<x<2\}$，由根与系数的关系可知：$a=-1,b=-2$，所以 $a+b=-3$.

9.C

10.A

提示：因为 $\{a_n\}$ 为各项为正数的等差数列，且前20项和为100，所以 $\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=100$，即 $a_1+a_{20}=10$，所以 $a_7+a_{14}=10$.又因为 $a_7\cdot a_{14}\le\left(\frac{a_7+a_{14}}{2}\right)^2=25$，

当且仅当 $a_7=a_{14}$ 时“=”成立.

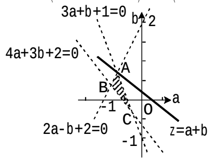
11.B

12.A

提示：令 $f(x)=x^2+(a+2b)x+3a+b+1$.

由题意，得 $\begin{cases}f(0)=3a+b+1<0,\\f(1)=4a+3b+2>0,\\f(-1)=2a-b+2>0.\end{cases}$

画出上述不等式组表示的可行域如图所示，其中 $A\left(-\frac35,\frac45\right)$，$C\left(-\frac15,-\frac25\right)$.



（第12题图）

当直线 $z=a+b$ 经过点 A 时，$z_{max}=\frac15$；

当直线 $z=a+b$ 经过点 C 时，$z_{min}=-\frac35$.

故 $a+b$ 的取值范围是 $\left(-\frac35,\frac15\right)$.

二、填空题

13. $\frac{3\sqrt3}{2}$

提示：将正六边形分割为6个等边三角形，则 $S_6=6\times\left(\frac12\times1\times1\times\sin60°\right)=\frac{3\sqrt3}{2}$.

14. $\frac{4n}{n+1}$

提示：观察数列 $\{a_n\}$ 可知，$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+1}=\frac n2$，

所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac1n-\frac1{n+1}\right)$，

所以 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $4\left(1-\frac12\right)+4\left(\frac12-\frac13\right)+\cdots+4\left(\frac1n-\frac1{n+1}\right)$

$=4\left(1-\frac12+\frac12-\frac13+\cdots+\frac1n-\frac1{n+1}\right)$

$=4\left(1-\frac1{n+1}\right)=\frac{4n}{n+1}$.

15.10

提示：因为二次函数 $f(x)=ax^2-x+c$ $(x\in\mathbf R)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，所以 $a>0$，

且 $\frac{4ac-1}{4a}=0$，所以 $ac=\frac14$，所以 $c>0$，

所以 $\frac{c+2}{a}+\frac{a+2}{c}=\frac ca+\frac ac+\frac2a+\frac2c\ge2\sqrt{\frac ca\cdot\frac ac}+2\sqrt{\frac4{ac}}=2+8=10$，当且仅当 $a=c$ 时取等号.

16.3

提示：由A,B,C成等差数列，可知 $B=\frac\pi3$.由余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac12$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$.所以 $\frac{(a+c)^2-b^2}{ac}=\frac{a^2+c^2-b^2+2ac}{ac}=\frac{ac+2ac}{ac}=3$.

三、解答题

17.解：(1)原不等式 $\Leftrightarrow x-2-\frac3x\le0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-3}{x}\le0$

$\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x-3)}{x}\le0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)(x-3)\le0,\\x\ne0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-1,\text{或 }0\le x\le3,\\x\ne0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\le-1$，或 $0<x\le3$.

所以原不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup(0,3]$.

(2)原不等式

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5\ge0,\\x+1\ge0,\\2x+5>(x+1)^2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+5\ge0,\\x+1<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac52,\\x\ge-1,\\2x+5>x^2+2x+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge-\frac52,\\x<-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1,\\(x+2)(x-2)<0,\end{cases}$ 或 $-\frac52\le x<-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1,\\-2<x<2,\end{cases}$ 或 $-\frac52\le x<-1$

$\Leftrightarrow -1\le x<2$，或 $-\frac52\le x<-1$

$\Leftrightarrow -\frac52\le x<2$.

所以原不等式的解集为 $\left[-\frac52,2\right)$.

18.解：由 $\boldsymbol m\perp\boldsymbol n$，得 $(a^2+c^2-b^2)\cdot\tan B-\sqrt3a\cdot c=0$，

即 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt3ac$，得 $a^2+c^2-b^2=\frac{\sqrt3ac}{\tan B}$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt3}{2\tan B}$，即 $\tan B\cos B=\frac{\sqrt3}2$，即 $\sin B=\frac{\sqrt3}2$，

所以 $B=\frac\pi3$ 或 $B=\frac{2\pi}3$.

19.解：设 x h后，B 船至 D 处，A 船至 C 处，$BD=20x$，$BC=100-15x$，因为 $x>0$，$100-15x>0$，所以 $0<x<\frac{20}3$，由余弦定理，得 $DC^2=(20x)^2+(100-15x)^2-2\cdot20x\cdot(100-15x)\cdot\cos120°$

$=325x^2-1\,000x+10\,000=325\left(x-\frac{20}{13}\right)^2+10\,000-\frac{10\,000}{13}\left(0<x<\frac{20}3\right)$.

所以 $x=\frac{20}{13}$ h后，两船最近，可鸣笛问好.

20.解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d.

因为 $a_5=-3$，$S_{10}=-40$，所以

$\begin{cases}a_1+4d=-3,\\10a_1+\frac{10\times9}{2}d=-40.\end{cases}$

解得 $a_1=5$，$d=-2$.

所以 $a_n=5+(n-1)(-2)=7-2n$.

(2)由(1)知，$a_n=7-2n$，

则 $b_n=7-2n+2^{7-2n}$.

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

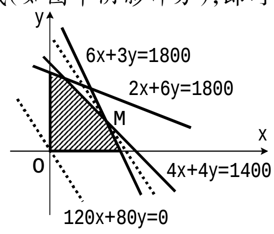
$=a_1+a_2+\cdots+a_n+2^5+2^3+\cdots+2^{7-2n}$

$=\frac{(5+7-2n)\cdot n}{2}+\frac{2^5(1-2^{-2n})}{1-2^{-2}}$

$=6n-n^2+\frac{128-2^{7-2n}}{3}$.

21.解：设每月生产布料 A，B 分别为 x 匹、y 匹，利润为 z 元，

那么 $\begin{cases}4x+4y\le1400,\\6x+3y\le1800,\\2x+6y\le1800,\\x\ge0,\\y\ge0,\end{cases}$ 目标函数为 $z=120x+80y$，作出上述不等式组所表示的平面区域（如图中阴影部分），即可行域.



（第21题图）

把 $z=120x+80y$ 变形为 $y=-\frac32x+\frac1{80}z$，这是斜率为 $-\frac32$，在y轴上的截距为 $\frac1{80}z$，随 z 变化的一族平行直线.由图可以看出，当直线 $y=-\frac32x+\frac1{80}z$ 经过可行域上点 M 时，截距 $\frac1{80}z$ 最大，即 z 最大.解方程组 $\begin{cases}4x+4y=1400,\\6x+3y=1800,\end{cases}$ 得点 M 的坐标为(250,100)，所以 $z_{max}=120\times250+80\times100=38000$（元）.

答：该公司每月生产布料 A，B 分别为250匹、100匹时，可产生最大的利润，最大的利润是38000元.

22.解：(1)由题意得 $a_n=q^n$，

所以 $b_n=a_n\cdot\log_4a_n=q^n\cdot\log_4q^n=n\cdot5^n\cdot\log_45$.

所以 $S_n=(1\times5+2\times5^2+\cdots+n\times5^n)\log_45$.

设 $T_n=1\times5+2\times5^2+\cdots+n\times5^n$，①

则 $5T_n=1\times5^2+2\times5^3+\cdots+(n-1)\times5^n+n\times5^{n+1}$，②

①-②，得 $-4T_n=5+5^2+5^3+\cdots+5^n-n\times5^{n+1}=\frac{5(5^n-1)}{4}-n\times5^{n+1}$，

所以 $T_n=\frac5{16}(4n\times5^n-5^n+1)$，

$S_n=\frac5{16}(4n\times5^n-5^n+1)\log_45$.

(2)因为 $b_n=a_n\log_4a_n=n\left(\frac{14}{15}\right)^n\log_4\frac{14}{15}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=(n+1)\left(\frac{14}{15}\right)^{n+1}\log_4\frac{14}{15}-n\left(\frac{14}{15}\right)^n\log_4\frac{14}{15}=\left(\frac{14}{15}\right)^n\left(\frac{14}{15}-\frac n{15}\right)\log_4\frac{14}{15}>0$.

因为 $\left(\frac{14}{15}\right)^n>0$，$\log_4\frac{14}{15}<0$，

所以 $\frac{14}{15}-\frac n{15}<0$，所以 $n>14$，

即 $n\ge15$ 时，$b_n<b_{n+1}$.

故所求的 n 的最小值是15.

数学·人教A(必修5)

第12期

第2、3版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.A　2.A　3.C　4.D　5.C　6.A　7.B　8.D　9.C

10.D

提示:由题意,知$-2,4$是$ax^2+bx+c=0$的两根.

由根与系数的关系,得

$$\begin{cases}-2+4=-\dfrac{b}{a},\\(-2)\times4=\dfrac{c}{a},\\a>0,\end{cases}$$所以$b=-2a,c=-8a$.

故$f(x)=ax^2+bx+c=a(x^2-2x-8)$,图象对称轴为$x=1$且开口向上,所以$f(2)<f(-1)<f(5)$.

11.A

提示:$a_n=\begin{cases}-2(n=1),\\2n-5(n\geqslant2),\end{cases}$所以$T_n=2+1+1+3+\cdots+15=67$.

12.B

提示:据已知约束条件可得其表示的平面区域M的面积$S=\frac{1}{2}\times4\times4k=8k$,故$\frac{kS}{k-1}=\frac{8k^2}{k-1}=8\cdot\frac{(k-1)^2+2(k-1)+1}{k-1}=8\left[(k-1)+\frac{1}{k-1}+2\right]$,由于$k>1$,故由基本不等式可得$\frac{kS}{k-1}=8\left[(k-1)+\frac{1}{k-1}+2\right]\geqslant8\left(2\sqrt{k-1\times\frac{1}{k-1}}+2\right)=32$,当且仅当$k=2$时取等号.

二、填空题

13.等边三角形

提示:由a,b,c成等差数列,得$a+c=2b$,　①

由$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$成等差数列,得$\sqrt{a}+\sqrt{c}=2\sqrt{b}$,②

②^2-①得$2\sqrt{ac}=2b$,即$b^2=ac$,①平方得$a^2+2ac+c^2=4b^2$,

将$b^2=ac$代入得$a^2+2ac+c^2=4ac$,即$(a-c)^2=0$,所以$a=c$.

又因为$a+c=2b$,所以$2a=2b$,所以$a=b$,所以$a=b=c$.

14.$[2,8]$

提示:设征收附加税后产销量为每年x万瓶,则销售收入每年$70x$万元,从中征收的税金为$70x\cdot k\%$万元,其中$x=100-10k$.由题意,得$70(100-10k)k\%\geqslant112$,整理得$k^2-10k+16\leqslant0$,解得$2\leqslant k\leqslant8$.

15.$\frac{21}{2}$

提示:由$a_{n+1}-a_n=2n$,得$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$,$a_{n-1}-a_{n-2}=2(n-2)$,$\cdots$,$a_2-a_1=2$.

将这$n-1$个式子累加得$a_n-a_1=\frac{2(n-1)(1+n-1)}{2}=n^2-n$.

因为$a_1=33$,所以$a_n=n^2-n+33$,所以$\frac{a_n}{n}=\frac{n^2-n+33}{n}=n+\frac{33}{n}-1$.当$n=6$时,$\frac{a_n}{n}$有最小值$\frac{21}{2}$.

16.$\sqrt{3}$

提示:因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,$a=2$,又$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\cdot\sin C$可化为$(a+b)(a-b)=(c-b)\cdot c$,所以$a^2-b^2=c^2-bc$,所以$b^2+c^2-a^2=bc$,

所以$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}=\cos A$,所以$A=60°$.

因为$\triangle ABC$中,$4=a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos60°=b^2+c^2-bc\geqslant2bc-bc=bc$(当且仅当$b=c$时取得"="),

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

三、解答题

17.**解**:将$A=60°$看作已知条件,

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$及$a=\sqrt{3}$,$B=45°$,得$b=\sqrt{2}$.

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$及$a=\sqrt{3}$,$A=60°$,$B=45°$,得$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

若已知条件为$b=\sqrt{2}$,则由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$A=60°$或$120°$,与答案矛盾.

若已知条件为$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,则$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2$,所以$b=\sqrt{2}$,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,所以$A=60°$.

综上所述,涂污处的已知条件为$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

18.(1)**证明**:因为a,b,c成等差数列,所以$a+c=2b$,

由正弦定理,得$\sin A+\sin C=2\sin B$.

因为$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$,

所以$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$.

(2)**解**:因为a,b,c成等比数列,所以$b^2=ac$,

由余弦定理,得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,当且仅当$a=c$时,等号成立.所以$\cos B$的最小值为$\frac{1}{2}$.

19.**解**:设楼层总数为n,总费用为y元,则征地面积为$\frac{2.5A}{n}$m^2,征地费用为$\frac{2.5A}{n}\times2388=\frac{5970A}{n}$元,

楼层建筑费用为

$[445+445+(445+30)+(445+30\times2)+\cdots+445+30\times(n-2)]\cdot\frac{A}{n}=\left(15n+\frac{30}{n}+400\right)A$,

从而$y=\frac{5970A}{n}+15nA+\frac{30A}{n}+400A=\left(15n+\frac{6000}{n}+400\right)A\geqslant1000A$(元),当且仅当$15n=\frac{6000}{n}$,即$n=20$(层)时,总费用$y$最少.

故当这幢宿舍楼的楼层为20层时,总费用最少,且最少总费用为$1000A$元.

20.**解**:(1)因为$a_1=5$,所以$a_2=2a_1+2^2-1=13$,$a_3=2a_2+2^3-1=33$.

(2)假设存在实数λ,使得数列$\left\{\frac{a_n+\lambda}{2^n}\right\}$为等差数列.设$b_n=\frac{a_n+\lambda}{2^n}$,由$\{b_n\}$为等差数列,得$2b_2=b_1+b_3$.所以$2\times\frac{a_2+\lambda}{2^2}=\frac{a_1+\lambda}{2}+\frac{a_3+\lambda}{2^3}$,即$\frac{13+\lambda}{2}=\frac{5+\lambda}{2}+\frac{33+\lambda}{8}$,解得$\lambda=-1$.从而$b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}-1}{2^{n+1}}-\frac{a_n-1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}[(a_{n+1}-2a_n)+1]=\frac{1}{2^{n+1}}[(2^{n+1}-1)+1]=1$.

综上可知,存在实数$\lambda=-1$,使得数列$\left\{\frac{a_n+\lambda}{2^n}\right\}$是首项为2,公差为1的等差数列.

21.**解**:(1)因为函数$y=\sqrt{ax^2+2ax+1}$的定义域为$\mathbf{R}$,所以$ax^2+2ax+1\geqslant0$恒成立.

①当$a=0$时,$1\geqslant0$,不等式恒成立;

②当$a\neq0$时,则$\begin{cases}a>0,\\\Delta=4a^2-4a\leqslant0,\end{cases}$解得$0<a\leqslant1$.

综上可知,a的取值范围是$[0,1]$.

(2)由$x^2-x-a^2+a<0$,得$(x-a)[x-(1-a)]<0$.

因为$0\leqslant a\leqslant1$,

所以①当$1-a>a$,即$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时,$a<x<1-a$;

②当$1-a=a$,即$a=\frac{1}{2}$时,$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<0$,不等式无解;

③当$1-a<a$,即$\frac{1}{2}<a\leqslant1$时,$1-a<x<a$.

综上,当$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时,原不等式的解集为$(a,1-a)$;

当$a=\frac{1}{2}$时,原不等式的解集为$\varnothing$;

当$\frac{1}{2}<a\leqslant1$时,原不等式的解集为$(1-a,a)$.

22.**解**:(1)由题意,可得$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$,

从而$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2a_1}$,解得$a_1=2$;

$\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2(a_1+a_2)}$,解得$a_2=-2$(舍),或$a_2=6$;

$\frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2(a_1+a_2+a_3)}$,解得$a_3=-6$(舍),或$a_3=10$.

(2)由$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$,得$S_n=\frac{(a_n+2)^2}{8}$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(a_n+2)^2}{8}-\frac{(a_{n-1}+2)^2}{8}$,

化简得$8a_n=a_n^2+4a_n-a_{n-1}^2-4a_{n-1}$,即$(a_n+a_{n-1})\cdot(a_n-a_{n-1}-4)=0$.又$a_n>0$,所以$a_n-a_{n-1}=4$.

因此,数列$\{a_n\}$是以2为首项,4为公差的等差数列,故$a_n=4n-2$.

(3)因为$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_{n+1}-a_n)^2+2a_na_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{16}{a_na_{n+1}}+2\right)=\frac{8}{a_na_{n+1}}+1=\frac{8}{(4n-2)(4n+2)}+1=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+1$,所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n-n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+n-n=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$.