数学·人教 A(必修 5)
第 3 期
第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.B

4.B

5.A

6.B

7.B

提示:原式可化为 $a\cdot\frac{1+\cos C}{2}+c\cdot\frac{1+\cos A}{2}=\frac{3}{2}b$,结合余弦定理,可得 $a+c=2b$.

8.C

9.B

10.A

提示:由题意,知a:b:c=3:5:7.

设a=3k,b=5k,c=7k,

由a+b+c=20,得 $k=\frac{4}{3}$,于是a=4,$b=\frac{20}{3}$,$c=\frac{28}{3}$,且 $\cos C=-\frac{1}{2}$,得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{20}{3}\sqrt{3}$.

11.D

12.A

二、填空题

13.45°

14.直角

提示:因为 $\lg a-\lg c=\lg(\sin A)=-\lg\sqrt{2}$,所以 $\frac{a}{c}=\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 A 为锐角,所以 $A=45°$,因为 $\sin C=\frac{c}{a}\sin A=\sqrt{2}\sin 45°=1$,所以 $C=90°$.

15.$(\sqrt{5},\sqrt{13})$

提示:要使△ABC 是一个锐角三角形,需满足 $3^2+2^2>c^2$,$2^2+c^2>3^2$,所以 $5<c^2<13$,即 $\sqrt{5}<c<\sqrt{13}$.

16.$100\sqrt{6}$

提示:在△ABC 中,∠CAB=30°,∠ACB=75°-30°=45°,根据正弦定理,得

$BC=\frac{AB}{\sin\angle ACB}\times\sin\angle BAC$

$=\frac{600}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=300\sqrt{2}$.

所以 $CD=BC\times\tan\angle DBC=300\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=100\sqrt{6}$.

三、解答题

17.**解**:设 BC=a,AC=b,AB=c,由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

所以 $2^2=a^2+(2\sqrt{3})^2-2a\times2\sqrt{3}\cos 30°$,即 $a^2-6a+8=0$,解得 a=2 或 a=4.

当 a=2 时,三边为 $2,2,2\sqrt{3}$,可组成三角形;当 a=4 时,三边为 $4,2,2\sqrt{3}$,也可组成三角形.

所以满足条件的三角形有两个.

18.**解**:由 $2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$,得 $\sin(A+B)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为△ABC 为锐角三角形,所以 $A+B=120°$,$C=60°$.

又因为 a,b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个解,

所以 $a+b=2\sqrt{3}$,$ab=2$,

所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=12-6=6$,

所以 $c=\sqrt{6}$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

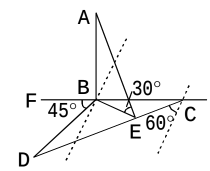
19.**解**:由正弦定理,可设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,则 $\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$.

由 $\sin^2A=\sin B\sin C$,得 $\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$,即 $a^2=bc$.

因为 $2a=b+c$,所以 $4a^2=(b+c)^2$,所以 $4bc=(b+c)^2$,即 $(b-c)^2=0$,所以 $b=c$.

所以 $a=b=c$,所以△ABC 为等边三角形.

20.**解**:如图,某人在 C 处,AB 为塔高,他沿 CD 前进,CD=40,此时∠DBF=45°,过点 B 作 BE⊥CD 于 E,则∠AEB=30°.在△BCD 中,CD=40,∠BCD=30°,∠DBC=135°,



(第 20 题图)

由正弦定理,得

$\frac{DC}{\sin\angle DBC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$,

所以 $BD=\frac{40\sin30°}{\sin135°}=20\sqrt{2}$(米).

∠BDE=45°-30°=15°.

在 Rt△BED 中,$BE=DB\sin15°=20\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=10(\sqrt{3}-1)$(米).

在 Rt△ABE 中,∠AEB=30°,

所以 $AB=BE\tan30°=\frac{10}{3}(3-\sqrt{3})$(米),

故所求的塔高为 $\frac{10}{3}(3-\sqrt{3})$米.

21.(1)**证明**:因为 $\lambda=\sqrt{3}$,所以 $a+b=\sqrt{3}c$,由正弦定理,得 $\sin A+\sin B=\sqrt{3}\sin C$.

因为 $C=\frac{\pi}{3}$,所以 $\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{3}{2}$,$\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\frac{3}{2}$,

所以 $\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{3}{2}$,则 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 或 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,$B=\frac{\pi}{6}$ 或 $B=\frac{\pi}{2}$.

若 $B=\frac{\pi}{6}$,则 $A=\frac{\pi}{2}$,△ABC 为直角三角形;若 $B=\frac{\pi}{2}$,△ABC 亦为直角三角形.

(2)**解**:若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{9}{8}\lambda^2$,则 $\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{9}{8}\lambda^2$,所以 $ab=\frac{9}{4}\lambda^2$.

又 $a+b=3\lambda$,由余弦定理,得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$,

即 $a^2+b^2-ab=c^2=9$,即 $(a+b)^2-3ab=9$,故 $9\lambda^2-\frac{27}{4}\lambda^2=9$,$\frac{9}{4}\lambda^2=9$,$\lambda^2=4$,即 $\lambda=2$.

22.**解**:(1)在△ABC 中,由余弦定理,得 $\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{8^2+5^2-AB^2}{2\times8\times5}$,①

在△ABD 中,由余弦定理,得

$\cos D=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{7^2+7^2-AB^2}{2\times7\times7}$,②

由∠C=∠D,得 $\cos C=\cos D$,

解得 AB=7,所以 AB 的长度为 7米.

(2)小李的设计使建造费用最低.

理由如下:

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\sin D$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C$,因为 $AD\cdot BD>AC\cdot BC$,所以 $S_{\triangle ABD}>S_{\triangle ABC}$.

故选择△ABC 建筑环境标志费用较低.

因为 $AD=BD=AB=7$,

所以△ABD 是等边三角形,∠D=60°.

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=10\sqrt{3}$,

所以总造价为 $5\ 000\times10\sqrt{3}=50\ 000\sqrt{3}\approx86\ 600$(元).