数学·人教A(必修5)

第1期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.B　4.C　5.D　6.C
7.C　8.B
9.D

提示：因为 $\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，所以由正弦定理，得 $c=2\sqrt{3}b$.

又因为 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，

所以由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-b^2-\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A=30°$.

10.C

提示：因为 $m\perp n$，所以 $\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin^2 C$，所以 $\sin(A+B)=\sin^2 C$，所以 $\sin C=\sin^2 C$.

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin C=1$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$.

11.D

提示：$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=2\cos A$. 因为 $B=2A$，所以 $C=\pi-A-B=\pi-3A$.

又因为△ABC 为锐角三角形，所以 $0<\pi-3A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{3}$.

又 $B=2A$，所以 $0<2A<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<A<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $2\cos A\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故选D.

12.C

提示：因为 $b=c$，所以由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2-2b^2\cos A=2b^2(1-\cos A)$.

又因为 $a^2=2b^2(1-\sin A)$，所以 $\cos A=\sin A$，因为 $\cos A\neq 0$，所以 $\tan A=1$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$，故选C.

二、填空题

13.$1:1:\sqrt{3}$

提示：$A=180°-B-C=30°$，由正弦定理，得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 30°:\sin 30°:\sin 120°=1:1:\sqrt{3}$.

14.$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

提示：由已知 $a=3,b=5,c=7$，得 $\cos C=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times 3\times 5}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{7}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

15.120°

提示：由 $\lg(a+c)+\lg(a-c)=\lg b-\lg\frac{1}{b+c}$，得 $(a+c)(a-c)=b(b+c)$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$，

故 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，所以 $A=120°$.

16.$-\frac{8}{3}$

提示：由余弦定理，得 $BC^2=2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，所以 $BC=\sqrt{7}$，所以 $\cos B=\frac{4+7-1}{2\times 2\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. 所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\times\sqrt{7}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}+\frac{\sqrt{7}}{3}\times\sqrt{7}\times 1=-\frac{8}{3}$.

三、解答题

17.**解：**由 $\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故 $\sin A=\sin(180°-45°-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C+\sin C)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由正弦定理，得 $BC=\frac{AC\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{2}$.

18.**解：**由于 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，可设 $a=x(x>0)$，$b=\sqrt{3}x$，$c=2x$.

由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3x^2+4x^2-x^2}{2\times\sqrt{3}x\times 2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $A=30°$.

同理可求得 $\cos B=\frac{1}{2}$，$\cos C=0$，所以 $B=60°$，$C=90°$.

19. **解：**(1)$\sin B=\frac{b\sin 120°}{a}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以△$ABC$ 有一解.

(2)$\sin B=\frac{b\sin 150°}{a}=1$，所以△$ABC$ 无解.

(3)$\sin B=\frac{b\sin 60°}{a}=\frac{10}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，而 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{3}}{9}<1$，

所以当 B 为锐角时，满足 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 的 B 的取值范围为 $60°<B<90°$.

当 B 为钝角时，有 $90°<B<120°$，也满足 $A+B<180°$，所以△ABC 有两解.

20. **解：**因为 $\frac{a^2\sin B}{\cos B}=\frac{b^2\sin A}{\cos A}$，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$（$R$ 为△ABC 外接圆的半径），所以 $\frac{4R^2\sin^2 A\sin B}{\cos B}=\frac{4R^2\sin^2 B\sin A}{\cos A}$.

又因为 $\sin A\sin B\neq 0$，所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin 2A=\sin 2B$，

所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$. 故△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

21.**解：**在△ABC 中，设 $AB=7x(x>0)$，$AC=8x$，

由正弦定理，得 $\frac{7x}{\sin C}=\frac{8x}{\sin B}$，所以 $\sin C=\frac{7x\cdot\sin B}{8x}=\frac{7}{8}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $C=60°$ 或 $120°$，由 $8x>7x$ 知 B 也为钝角，$C=120°$ 不合要求舍去.

再由余弦定理，得 $(7x)^2=(8x)^2+15^2-2\times 8x\times 15\times\frac{1}{2}$，所以 $x^2-8x+15=0$，解得 $x=3$ 或 $x=5$，所以 $AB=21$ 或 $AB=3$.在 Rt△ABD 中，$AD=AB\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}AB$，故 $AD=12\sqrt{3}$ 或 $AD=20\sqrt{3}$.

22.(1)**证明：**根据正弦定理，可设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k(k>0)$.

则 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$. 代入 $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ 中，有 $\frac{\cos A}{k\sin A}+\frac{\cos B}{k\sin B}=\frac{\sin C}{k\sin C}$，变形可得 $\sin A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$.在△$ABC$ 中，由 $A+B+C=\pi$，得 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，所以 $\sin A\sin B=\sin C$.

(2)**解：**由已知 $b^2+c^2-a^2=\frac{6}{5}bc$，结合余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$.

由(1)，$\sin A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

得 $\frac{4}{5}\sin B=\frac{4}{5}\cos B+\frac{3}{5}\sin B$，

故 $\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=4$.